

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО**  
*Кафедра высшей математики и математического моделирования*

**Э.В. ЧЕБОТАРЕВА**

**КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**  
**С GEOGEBRA**

**Учебно-методическое пособие**

**Казань – 2014**

**УДК 519.67**  
**ББК 22.1**

*Печатается по рекомендации учебно-методической комиссии  
Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского  
Протокол № 7 от 9 апреля 2015 года*

**Рецензенты:**

доктор педагогических наук, профессор кафедры математической  
лингвистики и информационных систем в филологии КФУ

**Л.Л.Салехова;**

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры  
высшей математики и математического моделирования КФУ

**Н.А. Москалев**

**Чеботарева Э.В.**

**Компьютерный эксперимент с GeoGebra / Э.В. Чеботарева – Казань:**  
Казанский ун-т, 2015. – 61 с.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 050100.62 «Педагогическое образование» и профилю подготовки «Математика, информатика и информационные технологии». Материалы, представленные в пособии, также могут быть полезны учителям математики.

С помощью пособия читатель сможет самостоятельно освоить основы работы с GeoGebra и создать собственные интерактивные чертежи, которые могут быть использованы не только в качестве наглядных пособий, но и стать основой для проведения красочных компьютерных экспериментов на уроках геометрии и алгебры в средней школе.

Пособие содержит множество разобранных примеров, а также задания для самостоятельного выполнения.

**@ Чеботарева Э.В., 2015**

**@ Казанский университет, 2015**

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1. ЗНАКОМСТВО С GEOGEBRA .....	5
2. ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.....	7
2. МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ АНИМИРОВАННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ .....	21
2.1 Перемещение объекта по заданной траектории.....	21
2.2 Перемещение объекта по окружности .....	26
2.3 Иллюстрация предельного перехода.....	28
3. ВЕКТОРЫ И ДВИЖЕНИЯ .....	31
4. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ .....	41
5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ. ИНТЕГРАЛ .....	45
6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ.....	49
7. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ.....	53
ЛИТЕРАТУРА .....	61

## **ВВЕДЕНИЕ**

Также как и при изучении любой научной дисциплины, при изучении математики важна наглядность. На сегодняшний день существует множество программных продуктов, которые помогают учителю математики в создании иллюстраций к изучению материала. Примером такой программы является GeoGebra.

Однако GeoGebra – это не только красочные иллюстрации к урокам геометрии и алгебры, это еще и мощнейший инструмент для организации исследовательской работы учащихся.

В школьном курсе математики есть множество тем, изучение которых можно превратить в небольшое исследование, где, как и в настоящих научных исследованиях, выдвигаются гипотезы, проводятся эксперименты, делаются выводы или даже открытия.

Компьютерные эксперименты с GeoGebra на уроках помогут учащимся лучше усвоить материал, развить абстрактное и логическое мышление, а также сделать уроки более интересными.

Настоящее пособие организовано в виде практикума по выполнению заданий в программе GeoGebra. К каждому разделу предлагаются задания для самостоятельного выполнения.

## 1. ЗНАКОМСТВО С GEOGEBRA

Чтобы установить GeoGebra, загрузите ее последнюю версию с сайта <http://geogebra.org/>.

После запуска Вы увидите окно главное окно программы (рис. 1.1).

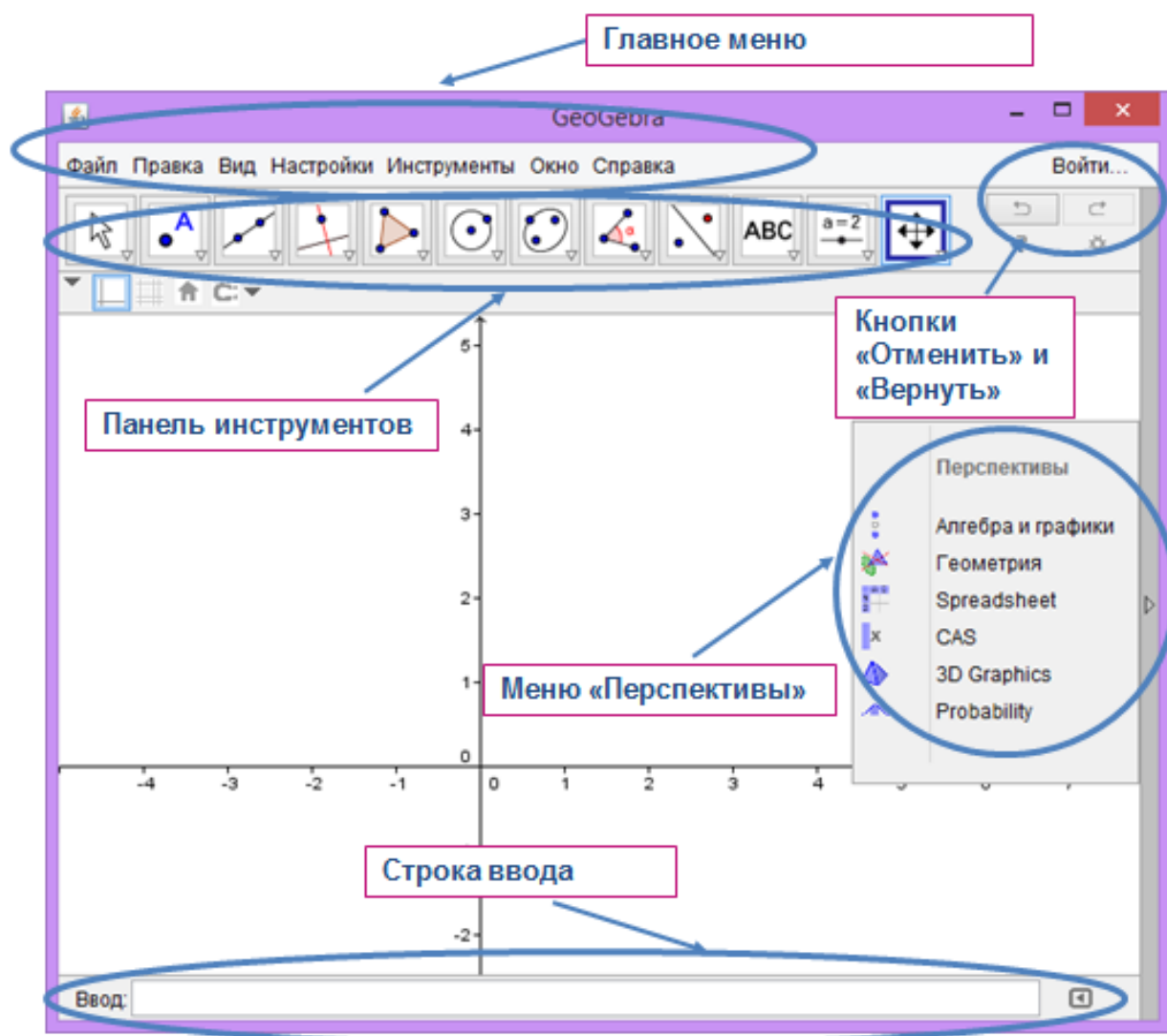
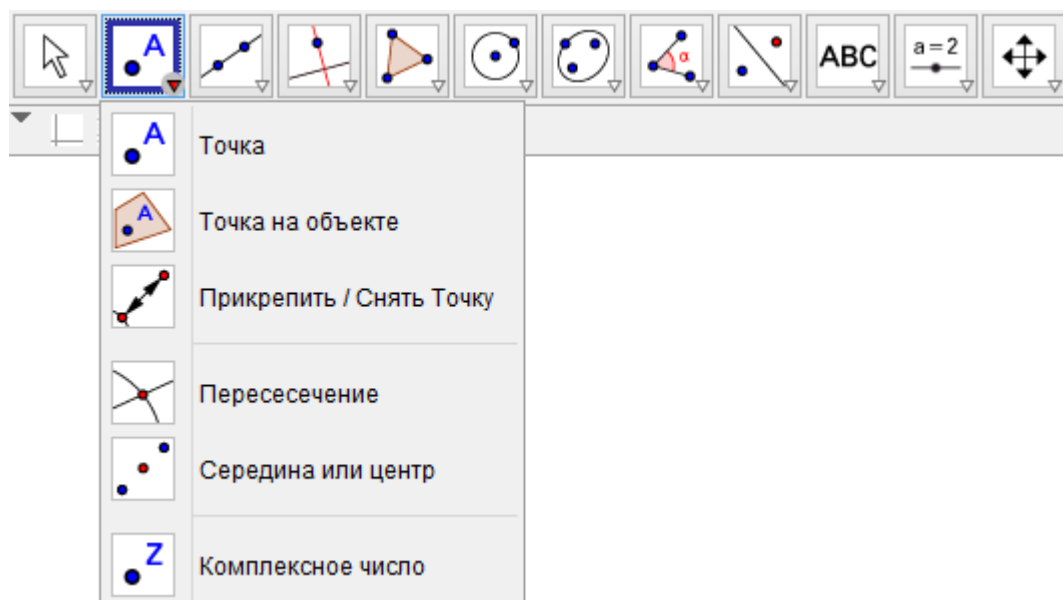


Рис. 1. Окно программы GeoGebra

Панель инструментов представляет собой меню, в котором заголовками подменю являются иконки инструментов (рис. 2).

Чтобы меню появилось, нужно нажать на треугольник в нижнем правом углу иконки инструмента.

Чертеж в GeoGebra можно сохранить в формате .ggb, а также экспортировать в изображение («Файл»-«Экспорт»-«Изображение»).



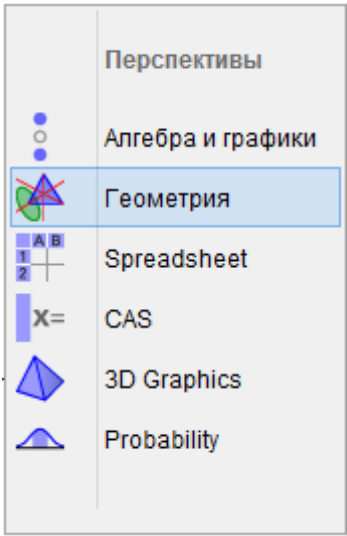

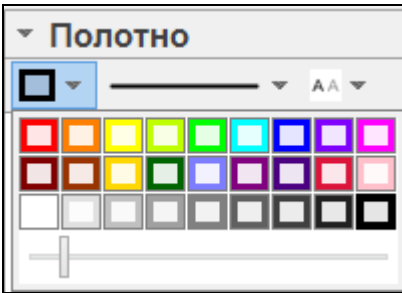
*Рис. 2 Панель инструментов*






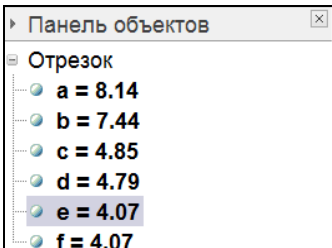



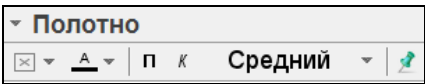
## 2. ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Предлагаемые задания служат для быстрого ознакомления с интерфейсом и базовыми возможностями GeoGebra, а также демонстрируют способы реализации компьютерного эксперимента при изучении геометрии.

*Задание 1.* Построение медианы треугольника.

### *Ход выполнения*

1.	<p>Запустите GeoGebra. В меню «Перспективы» в правой части полотна справа выберите вид «Геометрия».</p> 
2.	<p>Выполните «Вид-Панель объектов» в главном меню. Выполните «Настройки-Обозначения-Только для точек», затем «Настройки-Сохранить настройки».</p>
3.	<p>Выберите инструмент «Многоугольник»  и щелкните по любым трем точкам полотна. Чтобы завершить построение щелкните по первой вершине треугольника.</p>
4.	<p>Наведите курсор мыши на стрелку рядом с надписью «Полотно» и измените цвет треугольника</p> 

5.	<p>Выберите инструмент «Середина или центр»  и щелкните по точкам В и С.</p>
6.	<p>Выберите инструмент  и щелкните по точке D правой кнопкой мыши. В появившемся меню выберите «Переименовать» и переименуйте точку D в точку M.</p>
7.	<p>С помощью инструмента «Отрезок»  соедините точки А и М.</p>
8.	<p>С помощью инструмента «Отрезок»  постройте отрезки ВМ и МС.</p>
9.	<p>Выберите инструмент  и щелкните правой кнопкой мыши по отрезку e на панели объектов справа.</p> 
10.	<p>В появившемся меню выберите «Свойства-Стиль-Оформление» и укажите следующий вид оформления.</p>  <p>Закройте окно «Свойства» и аналогичным образом оформите отрезок f (отрезок МС).</p>
11.	<p>Выберите инструмент «Текст»  и щелкните левой кнопкой мыши над треугольником. В появившемся поле «Правка» введите текст «Медиана треугольника». Нажмите кнопку «ОК».</p> <p>При необходимости надпись можно подвинуть. Для этого наведите курсор на надпись и, не отпуская левую кнопку мыши придайте надписи нужное положение.</p>
12.	<p>С помощью инструмента  щелкните по надписи и выберите большой размер шрифта в меню под надписью «Полотно».</p> 



13.	Выполните «Файл-Сохранить». Сохраните файл как «Задание_1.ggb».
-----	---

На рис. 3 приведен результат выполнения задания.

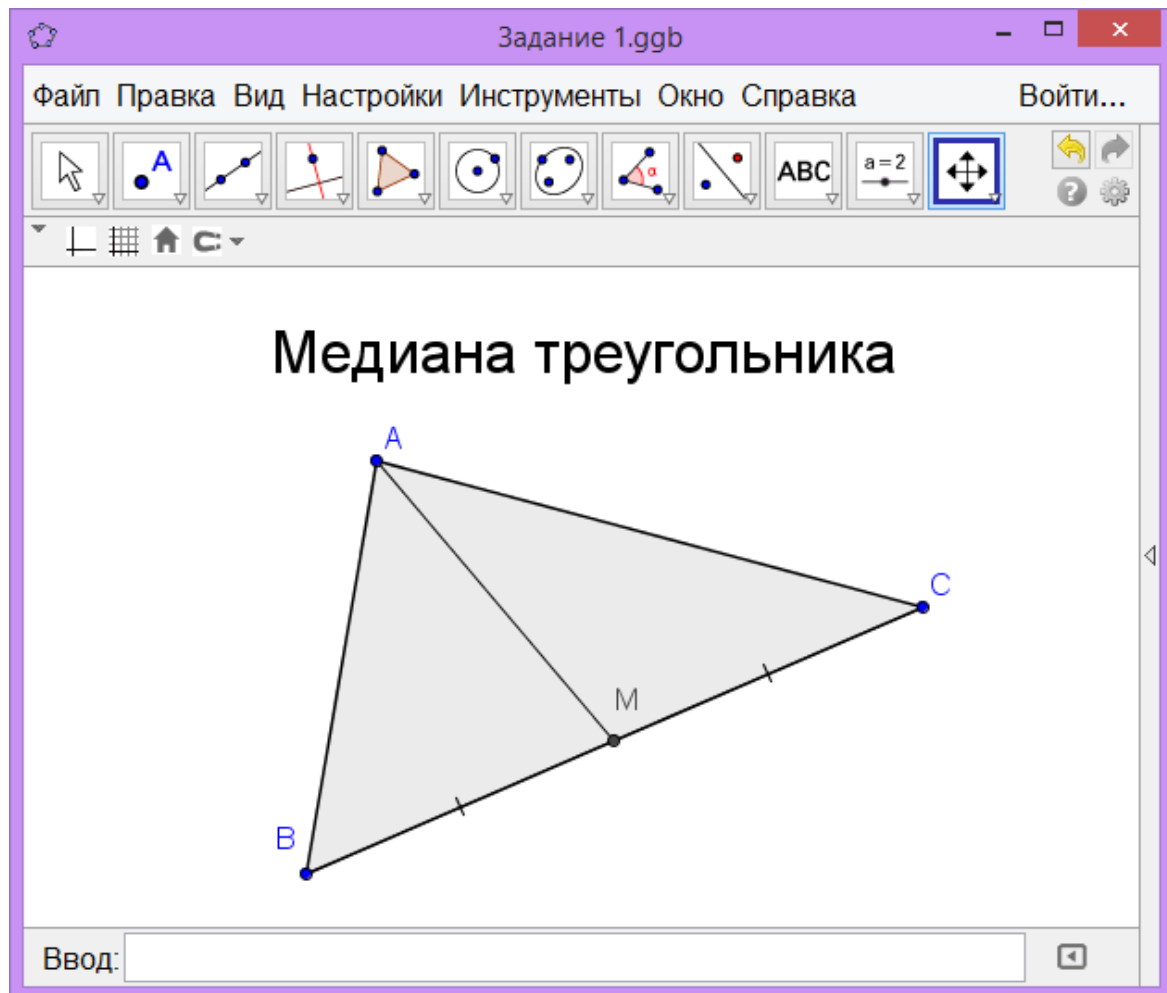



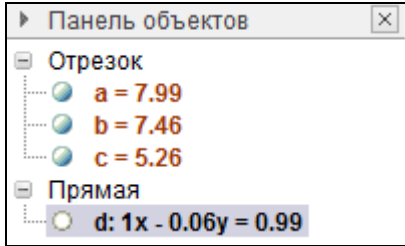




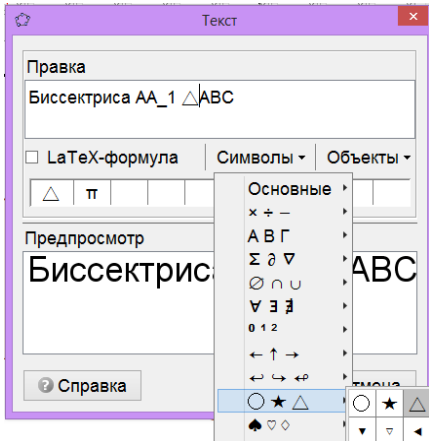


Рис. 3. Результат выполнения задания 1

Задание 2. Построение биссектрисы треугольника.

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл GeoGebra – «Файл-Создать»
2.	С помощью инструмента «Многоугольник»  постройте треугольник ABC.
3.	Выберите инструмент «Биссектриса угла»  и щелкните последовательно по точкам B, A, C.

4.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте точку пересечения биссектрисы и стороны ВС.
5.	Переименуйте точку пересечения D в точку A <sub>1</sub> . Для этого щелкните правой кнопкой мыши по точке D, выберите «Переименовать» и введите новое имя «A_1».
6.	<p>На панели объектов найдите биссектрису - прямую <math>d</math>. Щелкните по переключателю рядом с описанием прямой <math>d</math> так, чтобы она не отображалась на чертеже.</p>  <p>Этого же эффекта можно добиться щелкнув по прямой правой кнопкой мыши и сделав раздел «Показывать объект» неактивным.</p>
7.	С помощью инструмента «Отрезок»  соедините точки A и A <sub>1</sub> .
8.	Выберите инструмент «Угол»  и щелкните по точкам B, A, A <sub>1</sub> .
9.	На панели объектов щелкните правой кнопкой по углу $\alpha$ . В появившемся меню сделайте неактивным раздел «Показывать обозначение».
10.	Выберите инструмент «Угол»  и щелкните по точкам A <sub>1</sub> , A, C.
11.	<p>На панели объектов щелкните правой кнопкой по углу <math>\beta</math>. В появившемся меню выберите «Свойства-Основные» и уберите галочку «Показывать обозначение».</p> <p>Выберите вкладку «Стиль» и установите бегунок «Размер» на значении 40.</p>
12.	<p>С помощью инструмента «Текст»  создайте надпись. В появившемся поле «Правка» введите текст «Биссектриса AA_1 <math>\triangle</math>ABC».</p> <p>Символ <math>\triangle</math> вводится с помощью меню «Символы» окна «Текст».</p> 

13. Сохраните файл как «Задание\_2.ggb».

На рис. 4 приведен результат выполнения задания.

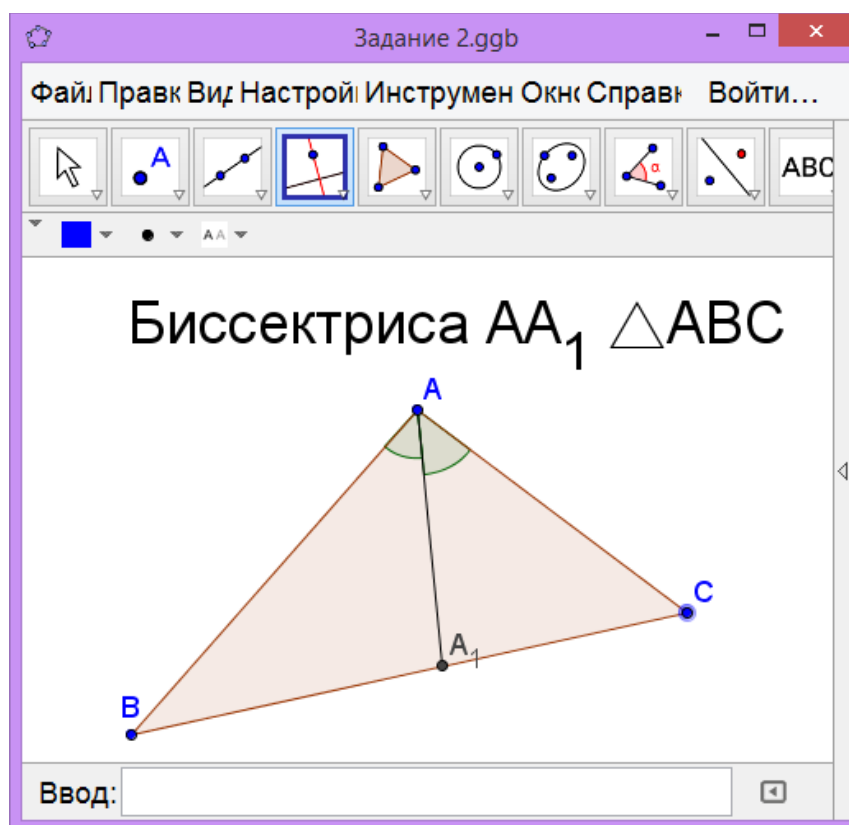








Рис. 4. Результат выполнения задания 2

Задание 3. Построение высоты треугольника.

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл GeoGebra – «Файл-Создать»
2.	С помощью инструмента «Многоугольник»  постройте треугольник ABC.
3.	Выберите инструмент «Перпендикулярная прямая»  и щелкните по точке A, а затем по стороне BC.
4.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте точку пересечения высоты и стороны BC.
5.	Переименуйте точку пересечения D в точку H. Для этого щелкните правой кнопкой мыши по точке D, выберите «Переименовать» и введите новое имя «H».

6.	На панели объектов найдите высоту - прямую $d$ . Щелкните по переключателю рядом с описанием прямой $d$ так, чтобы она не отображалась на чертеже.
7.	С помощью инструмента «Отрезок»  соедините точки А и Н.
8.	Выберите инструмент «Угол»  и щелкните по точкам С, Н, А.
9.	На панели объектов щелкните правой кнопкой по углу $\alpha$ . В появившемся меню сделайте неактивным раздел «Показывать обозначение».
10.	С помощью инструмента «Текст»  создайте надпись « $AH \perp BC$ ». Символ $\perp$ вводится с помощью меню «Символы» окна «Текст».
11.	Сохраните файл как «Задание_3.ggb».

На рис. 5 приведен результат выполнения задания.

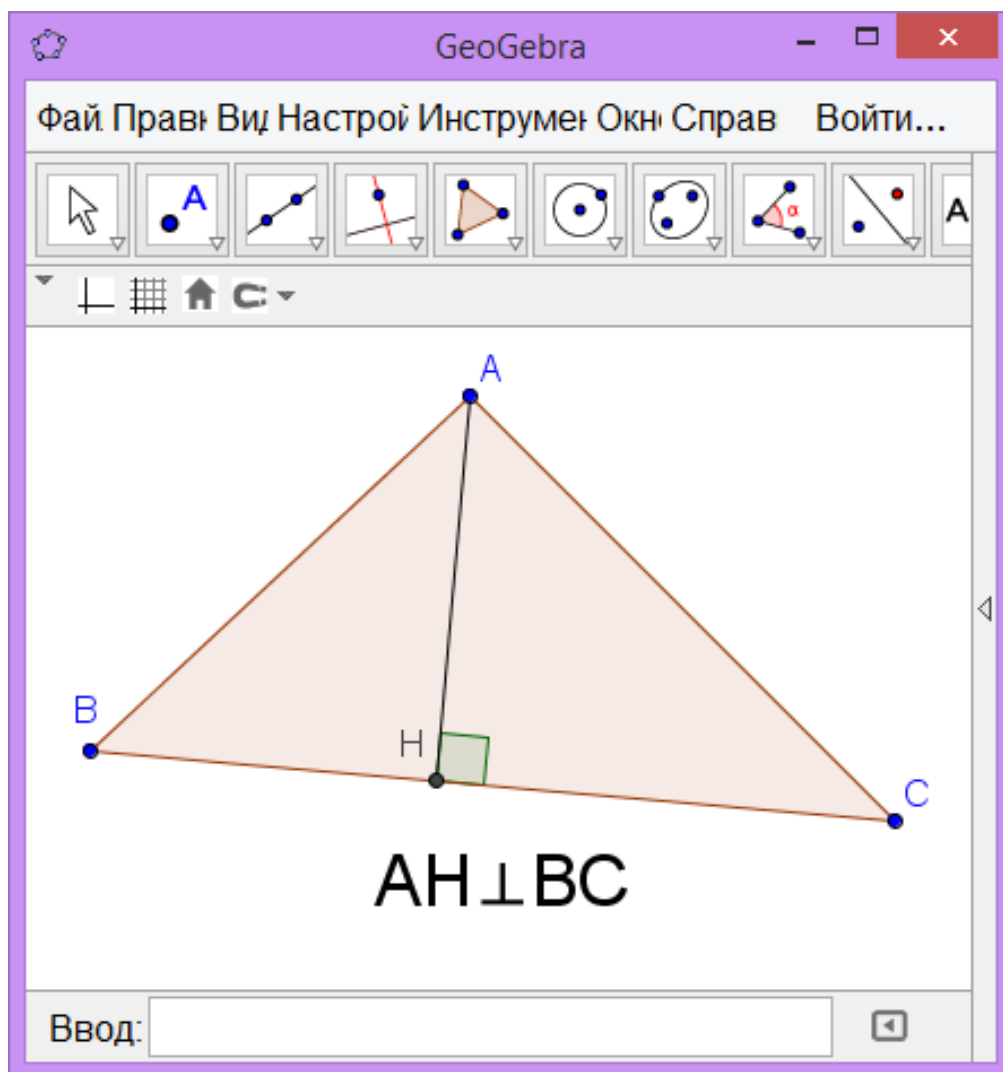


Рис. 5. Результат выполнения задания 3






**Задание 4.** Создайте чертеж, демонстрирующий, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке.


**Задание 5.** Создайте чертеж, демонстрирующий, что все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

**Задание 6.** Создайте чертеж, демонстрирующий, что все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

**Задание 7.** Создайте интерактивный чертеж, с помощью которого можно убедиться, что сумма углов любого треугольника равна  $180^\circ$ .

### **Ход выполнения**

1.	Создайте новый файл GeoGebra – «Файл-Создать».
2.	С помощью инструмента «Многоугольник»  постройте треугольник ABC. Построение проводите против часовой стрелки.
3.	Выберите инструмент «Угол»  и щелкните по точкам B, A, C.
4.	С помощью инструмента «Угол»  щелкните по точкам C, B, A.
5.	С помощью инструмента «Угол»  щелкните по точкам A, C, B.
6.	На панели объектов щелкните правой кнопкой по углу $\alpha$ . В появившемся меню сделайте неактивным раздел «Показывать обозначение». Выполните эти же действия для углов $\beta$ и $\gamma$ .
7.	С помощью инструмента «Текст»  добавьте на полотно надпись. В поле «Правка» введите « $\angle A + \angle B + \angle C =$ ». Символ « $\angle$ » вводится с помощью меню «Символы».
8.	Не закрывая окна «Текст» в меню «Объекты» выберите угол $\alpha$ . Затем введите символ «+». В меню «Объекты» выберите угол $\beta$ . Введите символ «+». В меню «Объекты» выберите угол $\gamma$ . Введите символ «=». В меню «Объекты» выберите «Пустая рамка». С помощью меню «Символы», в появившуюся в поле «Правка» пустую рамку, введите $\alpha + \beta + \gamma$ . Нажмите кнопку «ОК».

9.	Измените размер шрифта надписи на большой.
10.	Выполните «Настройки-Округление-0 разрядов».
11.	С помощью инструмента  попробуйте изменить местоположение вершин треугольника. При этом значения углов в надписи будут меняться, а сумма углов будет оставаться равной 180°.
12.	Сохраните файл как «Задание_7.ggb».

На рис. 6 приведен результат выполнения задания.

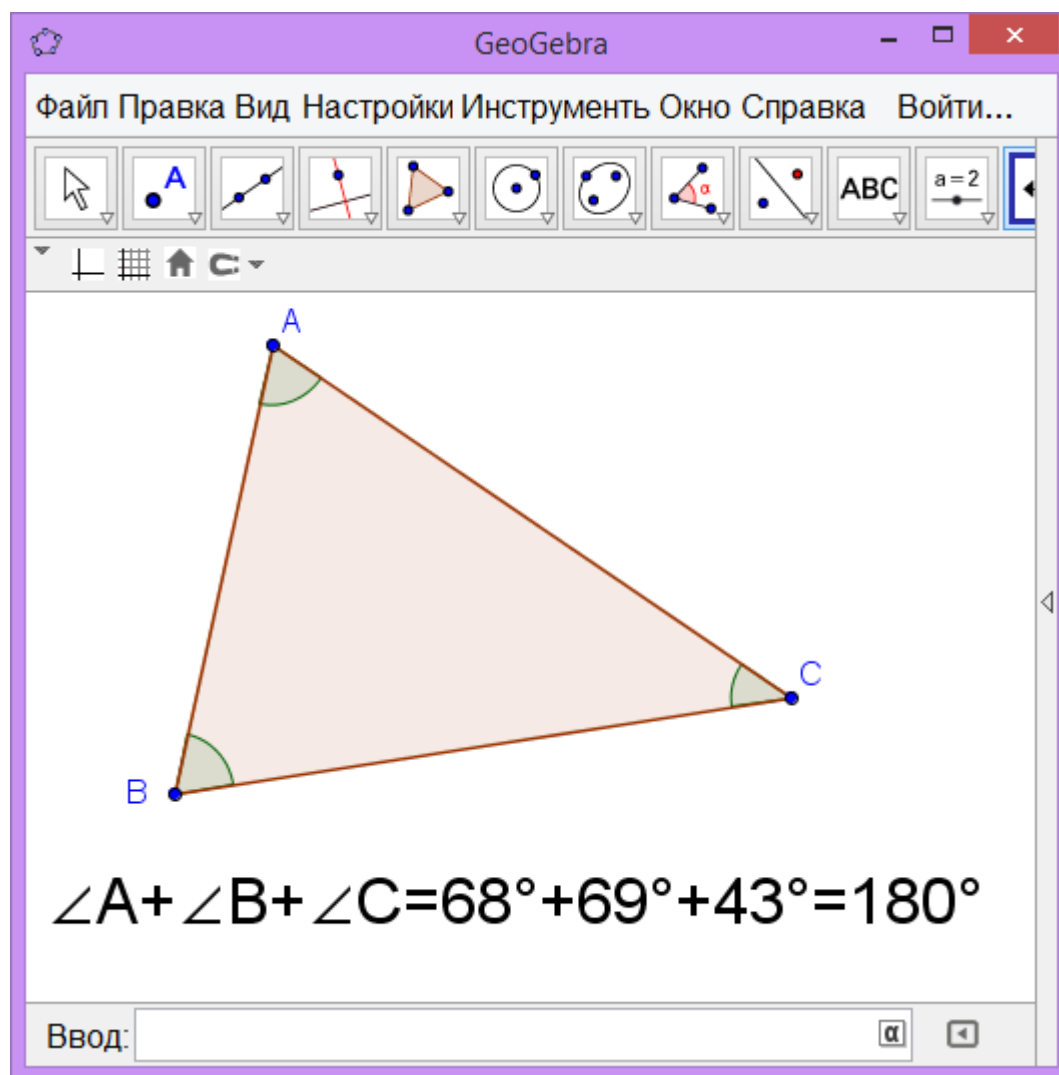






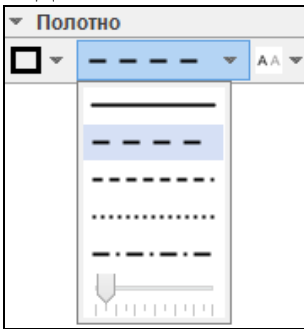
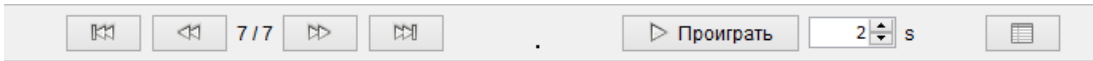







Рис. 6. Результат выполнения задания 7




**Задание 8.** С помощью GeoGebra создайте интерактивное пособие, демонстрирующее построение середины отрезка с помощью циркуля и линейки.

#### **Ход выполнения**

1.	Создайте новый файл GeoGebra – «Файл-Создать».
2.	Выполните «Настройки-Обозначения-Не вводить», затем «Настройки-Сохранить настройки».

3.	С помощью инструмента «Отрезок»  постройте произвольный отрезок.
4.	С помощью инструмента «Окружность по центру и точке»  постройте две окружности, центрами которых являются концы отрезка, а радиус которых равен длине отрезка.
5.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте точки пересечения окружностей.
6.	На панели объектов найдите высоту – прямую $d$ . Щелкните по переключателю рядом с описанием прямой $d$ так, чтобы она не отображалась на чертеже.
7.	С помощью инструмента «Прямая»  соедините точки пересечения окружностей.
8.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте точку пересечения полученной прямой и окружности.
9.	На панели объектов щелкните правой кнопкой по углу $\alpha$ . В появившемся меню сделайте неактивным раздел «Показывать обозначение».
10.	<p>Измените стиль линии окружностей и прямой на пунктирный. Для этого достаточно щелкнуть по объекту с помощью инструмента  и выбрать стиль линии рядом с надписью «Полотно».</p> 
11.	Сохраните файл как «Задание_8.ggb».
12.	<p>Чтобы продемонстрировать этапы построения щелкните правой кнопкой мыши по полотну и выберите «Шаги построения».</p> <p>Появившаяся внизу полотна панель навигации позволяет воспроизвести все шаги построения.</p> 

Задание 10. С помощью инструментов «Отрезок» , «Параллельная прямая» , «Перпендикулярная прямая» , «Пересечение» , «Многоугольник»  изобразите на одном чертеже параллелограмм, прямоугольник, ромб и трапецию.

Задание 9. Создайте интерактивное пособие, демонстрирующее построение правильного шестиугольника помощью циркуля и линейки. Используйте инструменты «Окружность по центру и точке» , «Пересечение»  и «Многоугольник» .

Указание. см. Рис. 8.

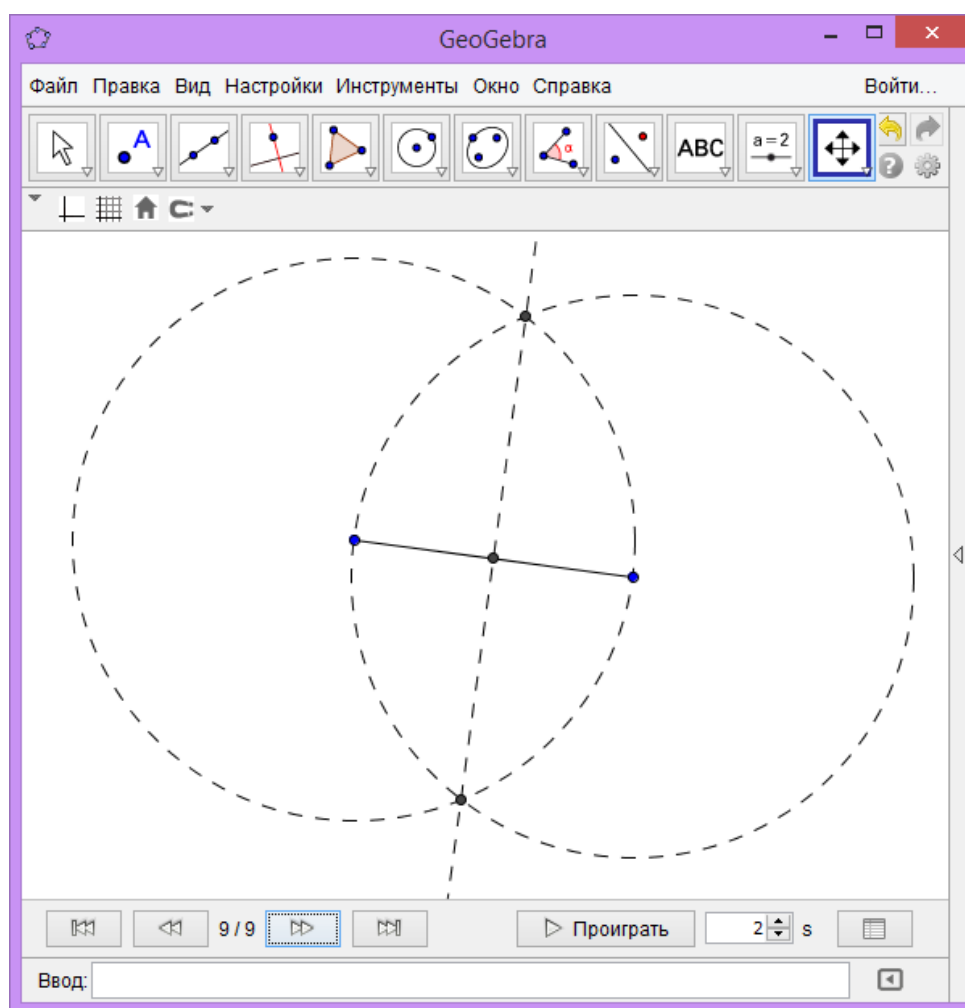


Рис. 7. Результат выполнения задания 8



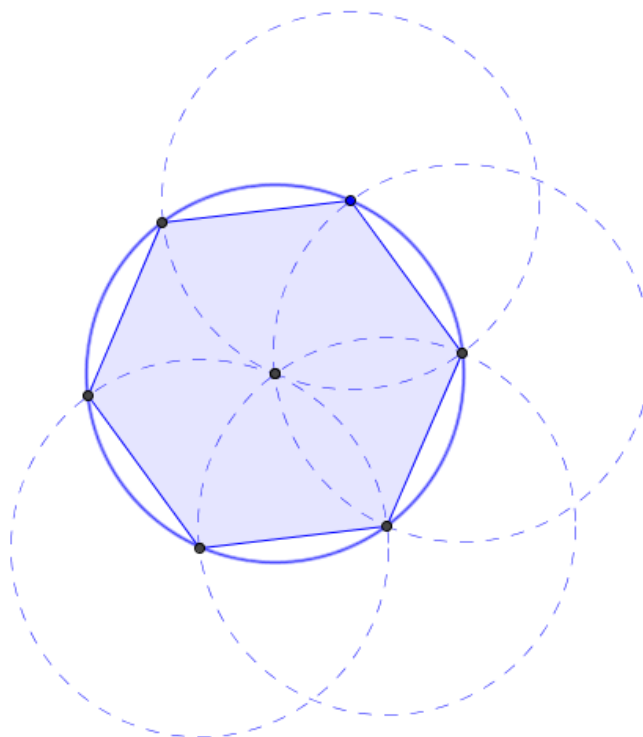



Рис. 8. Построение правильного шестиугольника



**Задание 11.** С помощью инструмента «Правильный многоугольник» изобразите на одном чертеже правильный треугольник, квадрат, правильный пятиугольник, правильный шестиугольник, правильный восьмиугольник, правильный десятиугольник.

### Ход выполнения




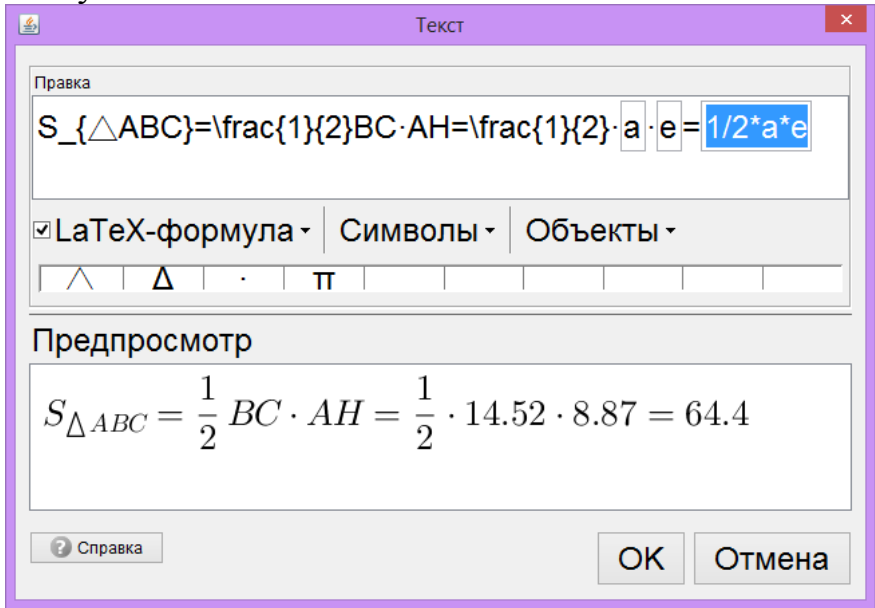
1.	Создайте новый файл GeoGebra
2.	Выберите инструмент «Правильный многоугольник»  и щелкните последовательно по двум произвольным точкам плоскости.
3.	В появившемся окне в поле «Вершины» укажите 3
4.	Для построения остальных правильных многоугольников выполните действия 2 и 3, указав нужно число вершин.

**Задание 12.** Создайте интерактивный чертеж, с помощью которого можно убедиться, что в равностороннем треугольнике любого размера все углы равны  $60^\circ$ .

**Задание 13.** Создайте интерактивный чертеж, с помощью которого можно убедиться, что площадь треугольника равна половине произведения основания

треугольника на высоту треугольника.

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл GeoGebra
2.	Выполните «Настройки-Обозначения-Только для точек», затем «Настройки-Сохранить настройки».
3.	Постройте произвольный треугольник ABC и его высоту AH, как в задании 3.
4.	Выберите инструмент «Площадь»  и щелкните по треугольнику ABC.
5.	Выберите инструмент «Расстояние или длина»  и щелкните по стороне BC и высоте AH
6.	<p>С помощью инструмента «Текст»  добавьте на полотно надпись. Поставьте галочку рядом с «LaTeX-формула»</p> <p><input checked="" type="checkbox"/> LaTeX-формула</p> <p>В поле «Правка» введите текст  <math>S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot \cdot</math>  Символы «<math>\Delta</math>» и «<math>\cdot</math>» вводятся с помощью меню «Символы»</p>
7.	<p>Не закрывая окна «Текст» в меню «Объекты» выберите сторону a.  Затем введите символ «<math>\cdot</math>».  В меню «Объекты» выберите сторону e.  Введите символ «<math>=</math>».  В меню «Объекты» выберите «Пустая рамка».  В появившуюся пустую рамку введите текст «<math>1/2 \cdot a \cdot e</math>»  Нажмите кнопку «ОК».</p> 
8.	Передвигая вершины треугольника убедитесь, что при этом значения площадей, вычисленных с помощью инструмента «Площадь» и с помощью формулы совпадают.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 14.52 \cdot 8.87 = 64.4$$

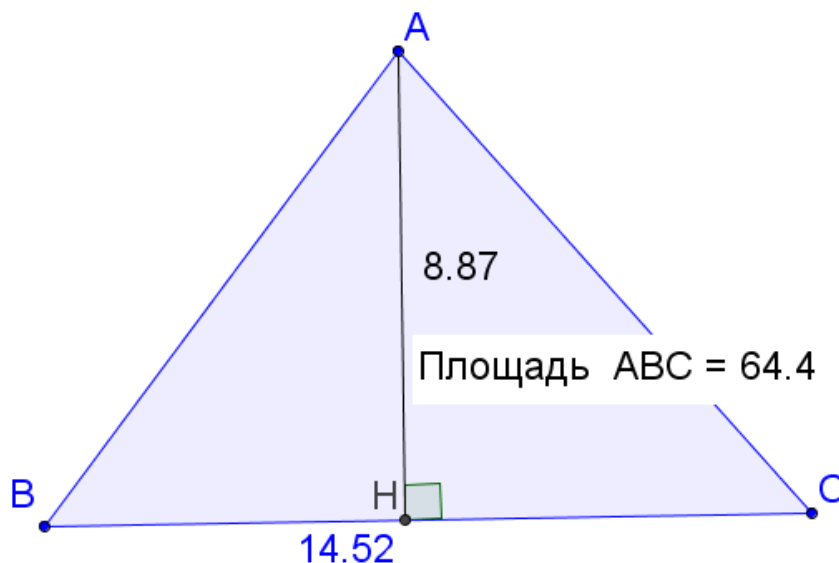


Рис. 9. Чертеж к заданию 13

**Задание 14.** Создайте интерактивный чертеж, с помощью которого можно убедиться, что площадь трапеции равна половине произведения суммы оснований трапеции на высоту трапеции.

### Задания для самостоятельной работы

Создайте динамический чертеж, иллюстрирующий следующие утверждения.

1. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.
2. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис.
3. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон.
4. Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна  $90^\circ$ .
5. Диагонали прямоугольника равны.
6. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$ .





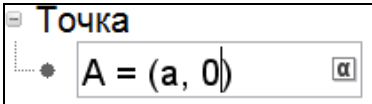

7. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, – прямой.
8. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу – равны.
9. Величина вписанного угла равна половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.
10. Медиана, проведенная в треугольнике, делит этот треугольник на две равновеликие части (на два треугольника с равными площадями).
11. Все три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.
12. В равносторонней трапеции диагонали равны и наклонены к основанию под одинаковыми углами.
13. Биссектрисой трапеции отсекается от основания (или его продолжения на прямой за пределами самой фигуры) отрезок такой же длины, что и боковая сторона.
14. Диагонали ромба перпендикулярны.
15. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.



## 2. МЕТОДЫ СОЗДАНИЯ АНИМИРОВАННЫХ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

### 2.1 Перемещение объекта по заданной траектории

*Задание 1.* С помощью ползунка переместите окружность по оси абсцисс.

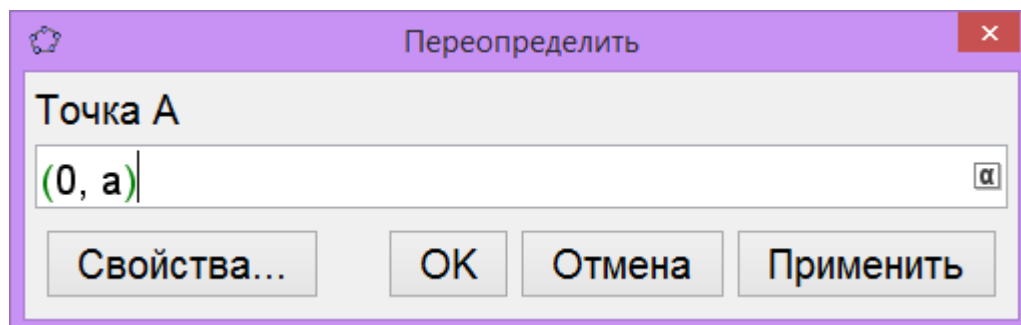
#### *Ход выполнения*

1.	Запустите GeoGebra. В меню «Перспективы» в правой части полотна выберите вид «Алгебра и графики».
2.	Выполните «Настройки-Обозначения-Не вводить», затем «Настройки-Сохранить настройки».
3.	С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу»  добавьте на полотно окружность с центром в произвольной точке и радиусом 1.
4.	Добавьте в верхний правый угол полотна ползунок с помощью инструмента «Ползунок»  . Для этого щелкните по области, в которой нужно разместить ползунок. В появившемся окне оставьте все значения без изменения и нажмите кнопку «Применить».
5.	С помощью инструмента  попробуйте переместить точку на ползунке. Убедитесь, что значение параметра $a$ меняется от -5 до 5. Установите ползунок в положение $a = -5$ .  Если необходимо изменить положение ползунка на полотне, то щелкните правой кнопкой по ползунку и уберите галочку в пункте «Закрепить», а затем переместите ползунок по полотну. После этого вновь закрепите ползунок.
6.	На панели объектов найдите точку A. Щелкните два раза по точке A панели объектов и измените ее координаты на $(a, 0)$ . Нажмите «Enter» на клавиатуре. 
7.	С помощью инструмента  попробуйте переместить точку на ползунке. Убедитесь, что центр окружности перемещается от точки $(-5, 0)$ до точ-

	ки (5,0).
8.	На панели объектов найдите параметр (число) а. Щелкните по нему правой кнопкой и выберите «Свойства». В появившемся окне выберите вкладку «Ползунок» и измените интервал на «мин.: -3», «макс.: 3». Закройте окно.
9.	С помощью инструмента  попробуйте переместить точку на ползунке. Убедитесь, что теперь центр окружности перемещается от точки (-3,0) до точки (3,0).
10.	Щелкните правой кнопкой по ползунку или на числе а на панели объектов и нажмите «Анимировать» в появившемся меню. Убедитесь, что теперь ползунок перемещается автоматически. Остановить анимацию можно нажав кнопку «Пауза»  в левом нижнем углу полотна.

**Задание 2.** С помощью ползунка переместите центр окружности единичного радиуса по оси ординат от точки (-3,0) до точки (3,0).

**Указание:** Выполните те же действия, что и в задании 1, с тем отличием, что в пункте 6 измените координаты центра окружности на (0, а).



*Рис. 10. Переопределение координат центра окружности*

**Задание 3.** С помощью ползунка переместите центр окружности единичного радиуса от точки (-3,-3) до точки (3,3) по прямой  $y=x$ .

**Указание:** Выполните те же действия, что и в задании 1, с тем отличием, что в пункте 6 измените координаты центра окружности на (а, а).

**Задание 4.** С помощью ползунка переместите картинку (изображение из файла) по оси абсцисс от точки (0,0) до точки (10,0) (см. рис. 11).

### ***Ход выполнения***

1.	Создайте новый файл GeoGebra – «Файл-Создать».
2.	Добавьте в верхний правый угол полотна ползунок с помощью инстру-

	<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">a = 2</div> мента «Ползунок» . Установите интервал для ползунка «мин.:0», «макс.:10».
3.	Выполните «Правка - Вставить изображение из - Файл». В появившемся диалоговом окне выберите файл с изображением, которое будет перемещаться по оси абсцисс и нажмите кнопку «Открыть». После этого изображение появится на полотне.
4.	Найдите на панели объектов точку A и измените ее координаты на (a,0).
5.	Найдите на панели объектов точку B и измените ее координаты на (a+3,0).
6.	С помощью инструмента <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">☞</div> попробуйте переместить точку на ползунке. Убедитесь, что изображение перемещается по оси абсцисс.
7.	Создайте gif-файл с движущимся изображением. Для этого выполните «Файл – Экспорт – Анимированное изображение (gif)». Измените время между кадрами на 50 ms и нажмите «Экспорт». Укажите имя файла, в который будет сохранена gif-анимация.

На рис.7. приведен результат выполнения задания.

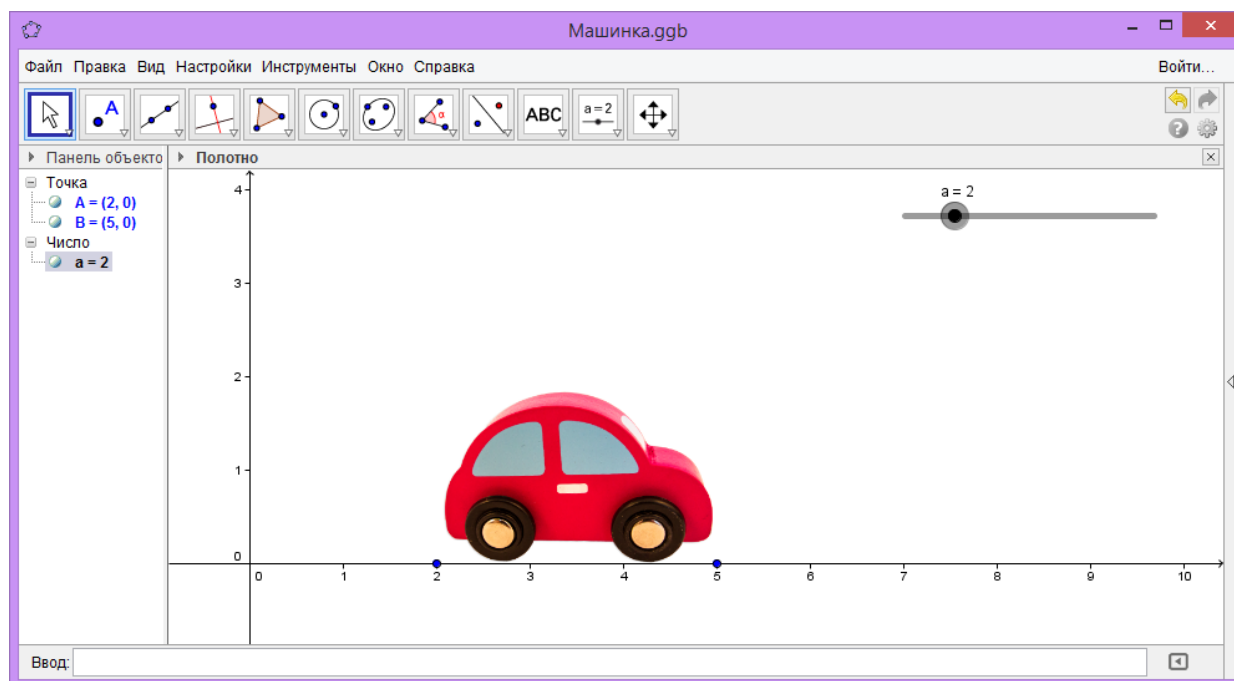



Рис. 11. Управление изображением с помощью ползунка

**Задание 5.** Создайте анимацию, в которой окружность радиуса 1 движется по траектории  $y = -0,25x^2 + 4$  от точки  $(-4,0)$  к точке  $(4,0)$ .

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл GeoGebra – «Файл-Создать».
2.	Добавьте в верхний правый угол полотна ползунок с помощью инструмента «Ползунок» <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">a = 2</div> . Установите интервал для ползунка «мин.: -4», «макс.: 4».

3. С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу»  добавьте на полотно окружность с центром в произвольной точке и радиусом 1.
  4. В строку ввода введите « $f(x) = -0.25x^2 + 4$ » и нажмите клавишу «Enter».
  5. Найдите на панели объектов точку A и измените ее координаты на  $(a, f(a))$ .
- На рис.12. приведен результат выполнения задания.

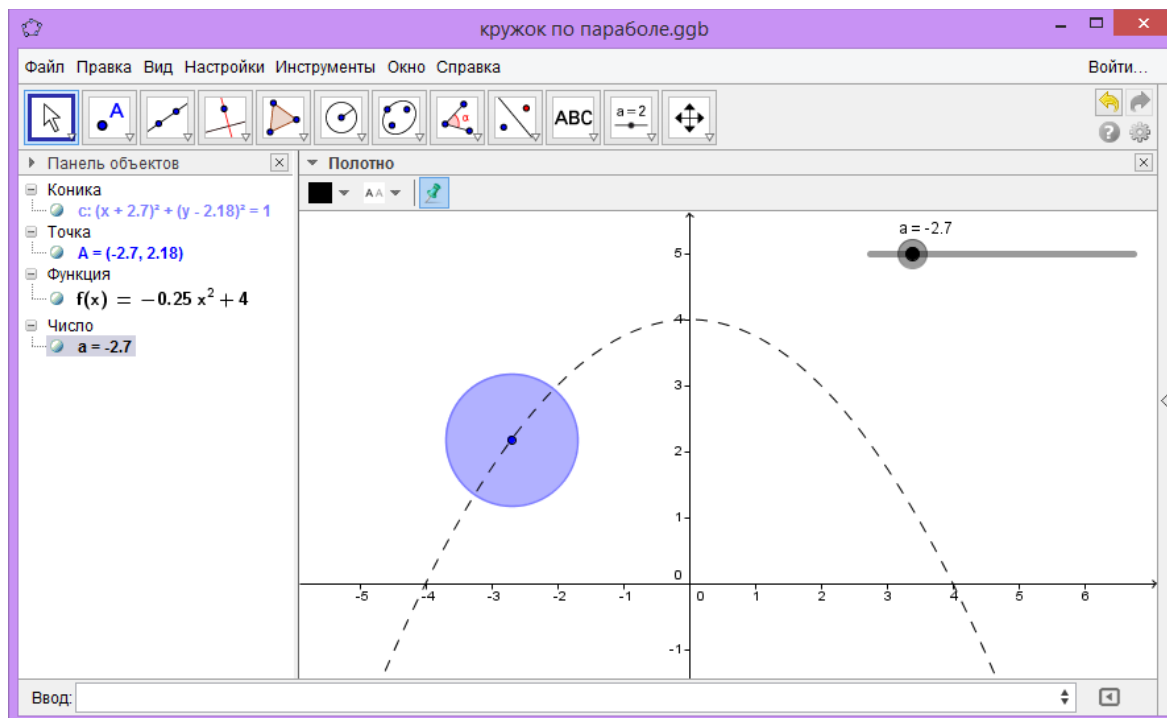



Рис. 12. Движение окружности по заданной траектории




**Задание 6.** Создайте анимацию, в которой окружность радиуса 1 движется по траектории  $y = \cos(x)$  от точки  $(-3, 0)$  к точке  $(3, 0)$ .

**Задание 7.** Создайте анимацию, в которой изображение движется вдоль линии  $y = \sin(x)$  от точки  $(0, 0)$  к точке  $(12, 0)$  (см. рис. 13)

### **Ход выполнения**

1. Создайте новый файл GeoGebra – «Файл-Создать».
2. Добавьте в верхний правый угол полотна ползунок с помощью инструмента «Ползунок» . Установите интервал для ползунка «мин.:0», «макс.:12». На вкладке «Анимация» укажите «Повтор - Увеличение».
3. В строку ввода введите « $f(x) = \sin(x)$ » и нажмите клавишу «Enter».
4. В строку ввода введите « $y \leq f(x)$ » и нажмите «Enter».
5. В строку ввода введите « $A = (a, f(a))$ » и нажмите «Enter».



6.	Выберите инструмент «Касательная»  и щелкните по точке A, а затем по графику $y=\sin(x)$ .
7.	Выберите инструмент «Окружность по центру и радиусу»  и щелкните по точке A. Укажите радиус равным 1.
8.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте слева на право точки пересечения окружности и касательной.
9.	Выполните «Правка - Вставить изображение из - Файл». В появившемся диалоговом окне выберите файл с изображением и нажмите кнопку «Открыть».
10.	Найдите на панели объектов точку D. Щелкните по ней два раза. Укажите «D=B». Найдите на панели объектов точку E. Щелкните по ней два раза. Укажите «E=C».
11.	Сделайте невидимыми окружность, касательную и точки A,B,C,D,E. Убедитесь, что изображение движется вдоль синусоиды

**Задание 8.** Создайте анимацию, в которой изображение движется вдоль линии  $y=x^2$  от точки  $(-2,0)$  к точке  $(2,0)$ .

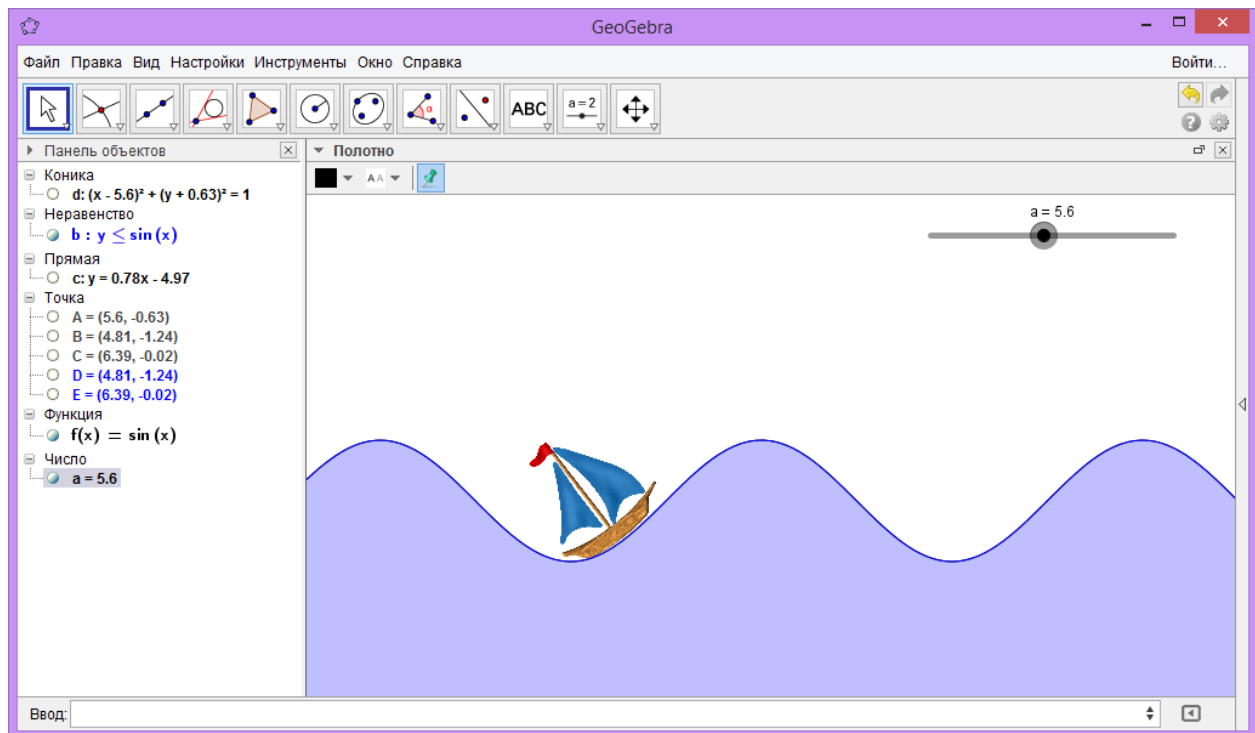





Рис. 13. Результат выполнения задания 7

## 2.2 Перемещение объекта по окружности




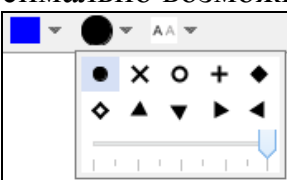
**Задание 1.** Создайте динамический чертеж, на котором изображена единичная окружность, движущаяся по окружности радиуса 3 и с центром в точке (0,0).


### Ход выполнения

1.	Запустите GeoGebra.
2.	В строке ввода введите «Окружность[ (0,0), 3]» и нажмите «Enter».
3.	Добавьте на полотно ползунок с помощью инструмента «Ползунок»  . В появившемся окне укажите «Угол» вместо «Число». Нажмите «Применить».
4.	С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу»  добавьте на полотно окружность радиуса 1.
5.	Измените координаты центра окружности - точки А на $(3 \cdot \cos(\alpha), 3 \cdot \sin(\alpha))$ . Для набора символа « $\alpha$ » используйте кнопку  , которая расположена справа в строке ввода.
6.	Убедитесь, что теперь при движении ползунка окружность радиуса 1 движется по окружности радиуса 3.

**Задание 2.** Создайте изображение, приведенное на рис.14.

### Ход выполнения

1.	Запустите GeoGebra.
2.	В строке ввода введите «A=(0,0)» и нажмите «Enter».
3.	Выберите инструмент «Отрезок с фиксированной длиной»  , щелкните по точке А и укажите длину 4.
4.	Выберите инструмент «Середина или центр»  и щелкните по точкам А и В. Щелкните по точкам А и С. Щелкните по точкам С и В.
5.	С помощью инструмента  выделите точку В и сделайте ее размер максимально возможным. Укажите цвет точки – синий.  Увеличьте также точки С, D, E и сделайте их разноцветными.
6.	Щелкните по точке В правой кнопкой и выберите «Оставлять след».

	То же самое выполните для точек C,D,E.
7.	Добавьте на полотно ползунок с помощью инструмента «Ползунок». В появившемся окне укажите «Угол» вместо «Число». Нажмите применить. 
8.	Измените координаты точки В на $(4 \cdot \cos(\alpha), 4 \cdot \sin(\alpha))$ .
9.	Анимлируйте ползунок.

*Задание 3.* Создайте динамический чертеж, изображающий правильный шестиугольник, вращающийся вокруг своего центра.

*Задание 4.* Создайте динамический чертеж к решению задачи. В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $B$  и  $D$  прямые,  $AB = BC$ , перпендикуляр  $BH$  к стороне  $AD$  равен 1. Найдите площадь четырехугольника.

*Указание:* треугольник  $ABH$  должен поворачиваться вокруг вершины  $B$ .

*Задание 5.* Создайте интерактивное пособие для изучения тригонометрической окружности (рис. 15).

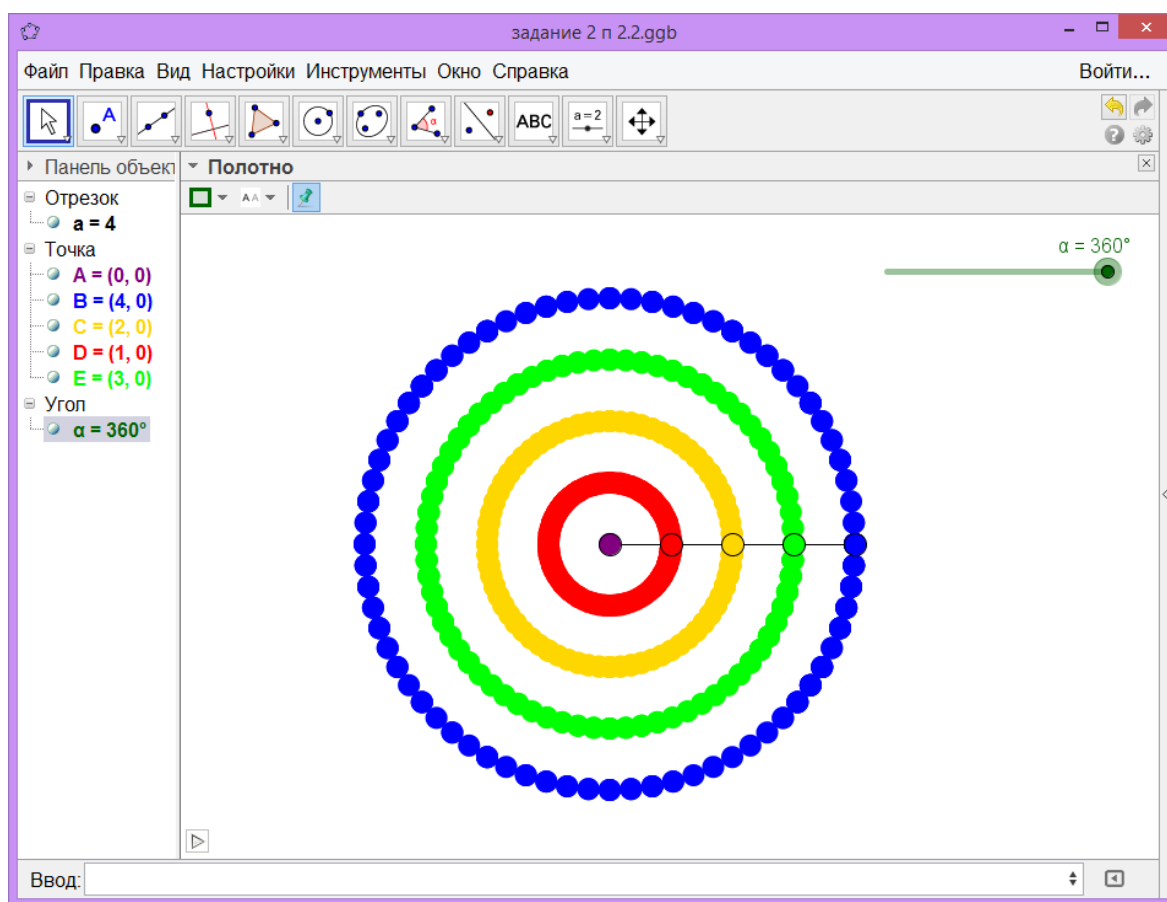


Рис. 14. Рисунок к заданию 2.

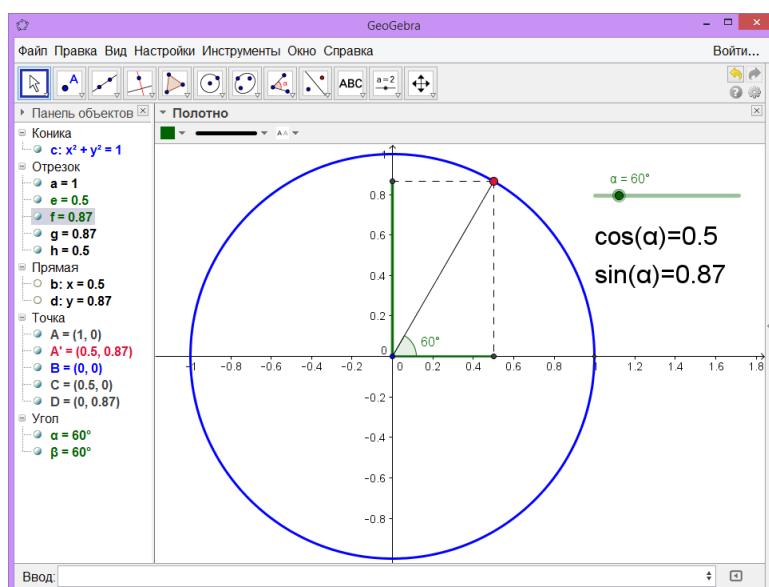









Рис. 15. Тригонометрическая окружность

### 2.3 Иллюстрация предельного перехода

**Задание 1.** Создайте динамический чертеж к доказательству формулы длины окружности.

#### Ход выполнения

1.	Запустите GeoGebra.
2.	Добавьте на полотно ползунок для числа $n$ с помощью инструмента «Ползунок»  . В появившемся окне укажите в поле «Имя» имя « $n$ », «Целое число» вместо «Число». Установите интервал для ползунка «мин.:3», «макс.:100». Нажмите «Применить».
3.	В строке ввода введите « $R=3$ » и нажмите «Enter».
4.	В строке ввода введите « $a=2 \cdot R \cdot \sin(180^\circ/n)$ » и нажмите «Enter».
5.	С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу»  добавьте на полотно окружность радиуса $R$ .
6.	С помощью инструмента «Точка на объекте»  добавьте на окружность точку $B$ .

7.	С помощью инструмента «Окружность по центру и радиусу»  добавьте на полотно окружность с центром в точке В и радиуса а.
8.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте одну из точек пересечения окружностей.
9.	Сделайте окружность с центром в точке В невидимой.
10.	С помощью инструмента «Правильный многоугольник»  постройте на точках В и С многоугольник. Точки необходимо отмечать против часовой стрелки. Укажите число вершин равным n.
11.	Добавьте на полотно надпись с помощью инструмента «Текст»  с текстом как на рис. 16.
12.	Убедитесь, что при изменении значения n периметр многоугольника стремится к длине описанной окружности.

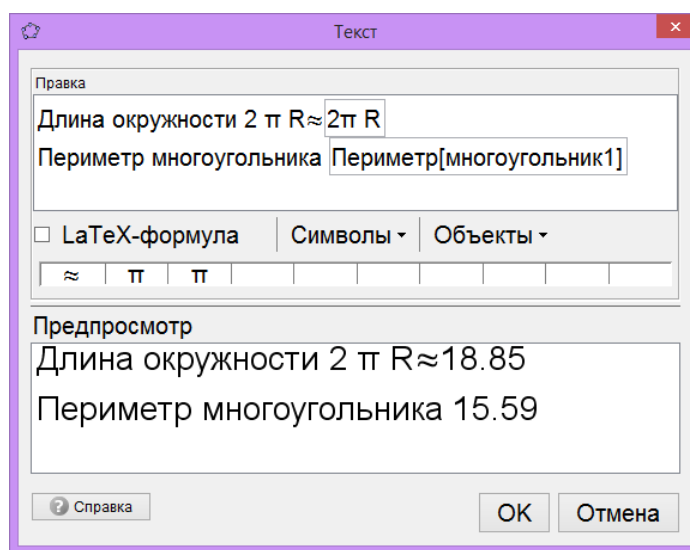


Рис. 16. Текст надписи

**Задание 2.** Создайте динамический чертеж к доказательству формулы площади круга.

### Задания для самостоятельной работы

1. Создайте анимацию, изображающую вращающийся вокруг своей вершины квадрат.
2. Создайте чертеж, изображающий равносторонний треугольник, длиной

стороны которого можно управлять с помощью ползунка.

3. Создайте анимацию, изображающую две концентрические окружности с радиусами 3 и 5, по которым в противоположных направлениях движутся два круга единичного радиуса.

4. Создайте анимацию, изображающую прямые  $y=x-2$  и  $y=x+2$ , вдоль которых в противоположных направлениях движутся две картинки.

5. Создайте чертеж, демонстрирующий тот факт, что при увеличении стороны квадрата в  $n$  раз, его площадь увеличивается в  $n^2$  раз.

6. Создайте анимацию, изображающую вращение равностороннего треугольника вокруг одной из своих вершин.

7. Создайте анимацию, изображающую прямые  $y=x$  и  $y=-x$ , по которым от начала координат в противоположных направлениях движутся четыре окружности.

8. Создайте чертеж, изображающий правильный пятиугольник, длиной стороны которого можно управлять с помощью ползунка.

9. Создайте анимацию, изображающую вращение шестиугольника треугольника вокруг одной из своих вершин.

10. Создайте анимацию, изображающую вращение картинки вокруг точки.

11. Создайте анимацию, изображающую движение вдоль оси абсцисс от начала координат в разных направлениях двух картинок.

12. Создайте анимацию, изображающую вращение треугольника вокруг своего центра тяжести.

13. Создайте анимацию, изображающую вращение треугольника вокруг центра описанной окружности.


14. Создайте анимацию, изображающую вращение треугольника вокруг центра вписанной окружности.

15. Создайте чертеж, изображающий треугольник, длинами двух сторон которого и величиной одного из углов можно управлять с помощью ползунка.

### 3. ВЕКТОРЫ И ДВИЖЕНИЯ

*Задание 1.* Постройте векторы  $u(3,1)$ ,  $v(2,4)$ ,  $u+v$ ,  $2u$ ,  $-v$ .



#### *Ход выполнения*


1.	Запустите GeoGebra.
2.	Постройте точки $A(0,0)$ и $B(3,1)$ и соедините точку $A$ с точкой $B$ с помощью инструмента «Вектор»  . Обратите внимание, что после этого на панели объектов отобразится вектор $u$ .
3.	В строке ввода введите «Вектор[(2,4)]» и нажмите «Enter». На полотне отобразится вектор $v$ .
4.	В строке ввода введите « $u+v$ » и нажмите «Enter».
5.	В строке ввода введите « $2u$ » и нажмите «Enter».
6.	В строке ввода введите « $-v$ » и нажмите «Enter».

*Задание 2.* Создайте чертежи, демонстрирующие сложение векторов по правилам параллелограмма и треугольника, умножение вектора на число, разность векторов.


*Задание 3.* Постройте два многоугольника, симметричных относительно прямой.

#### *Ход выполнения*

1.	Создайте новый файл
2.	С помощью инструмента «Прямая»  постройте произвольную прямую.
3.	Постройте произвольный многоугольник с помощью инструмента «Многоугольник»  .
4.	Выберите инструмент «Отражение относительно прямой» и щелкните сначала по многоугольнику, затем по прямой.

*Задание 4.* Добавьте на полотно изображение и с помощью инструмента «Отражение относительно прямой»  отразите его относительно произвольной прямой (см. рис. 18).

Задание 5. Добавьте на полотно изображение и с помощью инструмента

«Отражение относительно точки»  отразите его относительно произвольной точки (см. рис. 19).

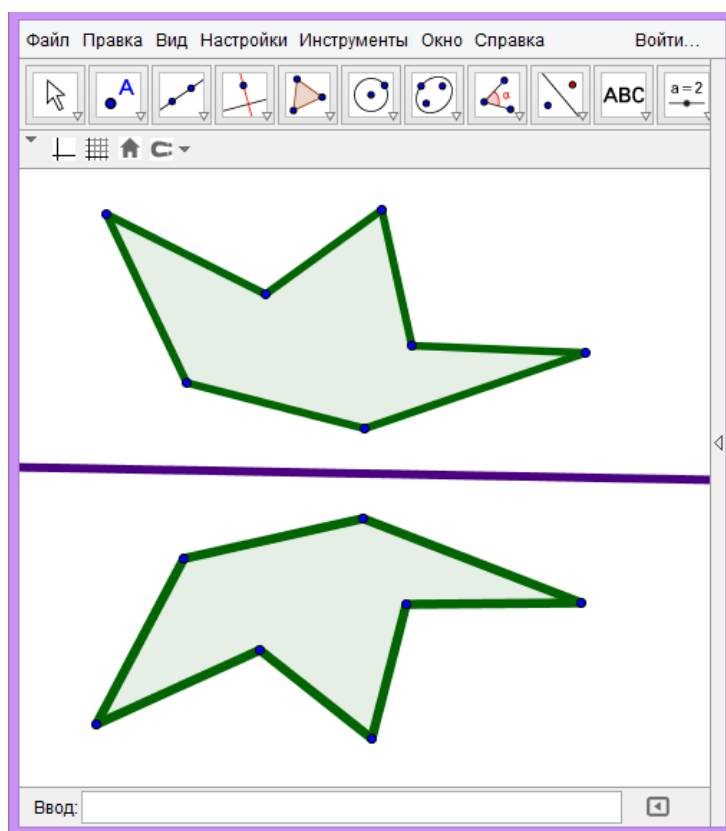


Рис. 17. Результат выполнения задания 3

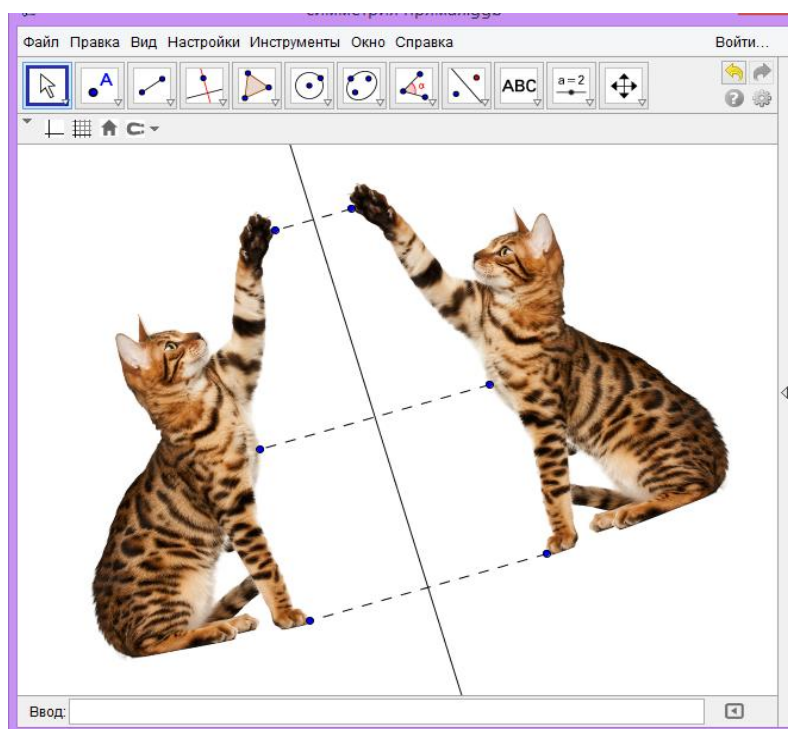


Рис. 18. Симметрия относительно прямой



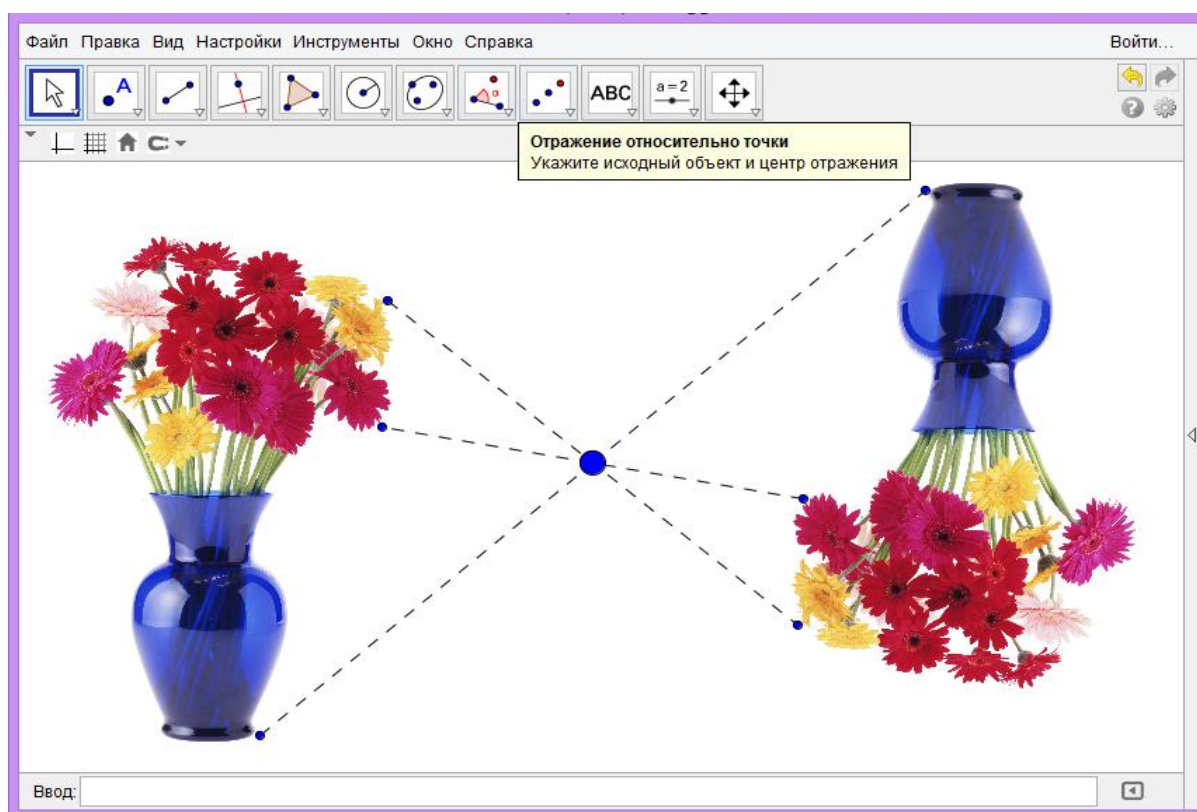





Рис. 19. Симметрия относительно точки

Задание 6. С помощью инструментов «Поворот вокруг точки» 

и «Отражение относительно прямой»  создайте рисунок, аналогичный рис. 20.

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл
2.	С помощью инструмента «Луч»  постройте произвольный луч.
3.	Выберите инструмент «Поворот вокруг точки»  и щелкните по началу луча (точке А) и по самому лучу. Укажите угол поворота 120°. Выполните эти же действия с появившимся лучом.
4.	Добавьте на полотно точку (точка С) и поверните ее на 120° вокруг точки А. Получившуюся точку (точку С') также поверните на 120° вокруг точки А.
5.	Сделайте точки С, С', С'' разноцветными и увеличьте их размер. В свойствах этих точек укажите «Оставлять след».
6.	Переместите точку С по полотну.

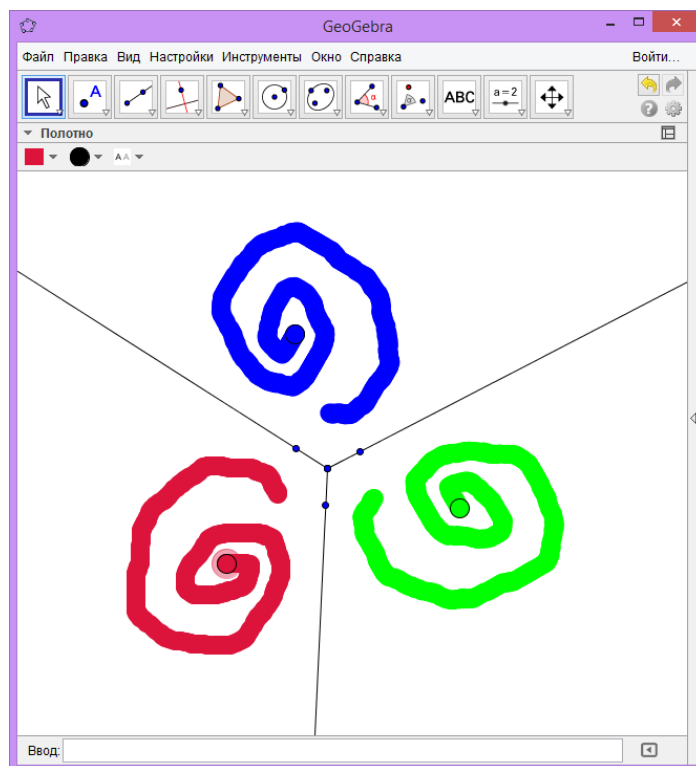



Рис. 20. Изображение к заданию 6

Задание 7. С помощью инструмента «Гомотетия»  создайте рисунок, аналогичный рис. 21.

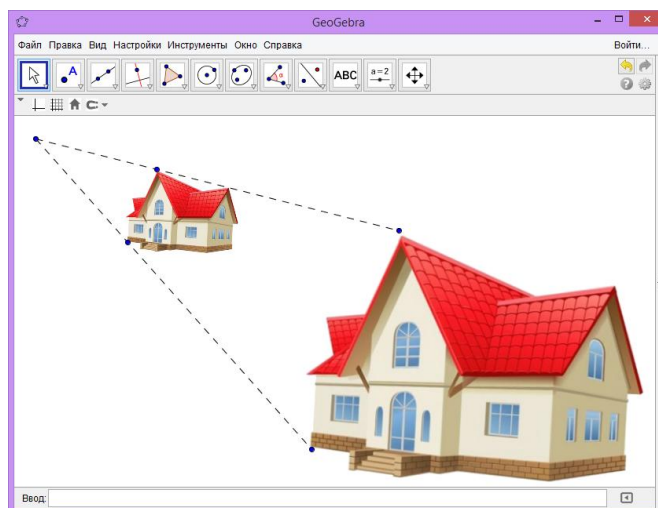





Рис. 21. Гомотетия

Задание 8. С помощью инструментов «Многоугольник» , «Точка на объекте» , «Гомотетия»  и опции «Оставлять след» создайте рисунок, аналогичный рис. 22.

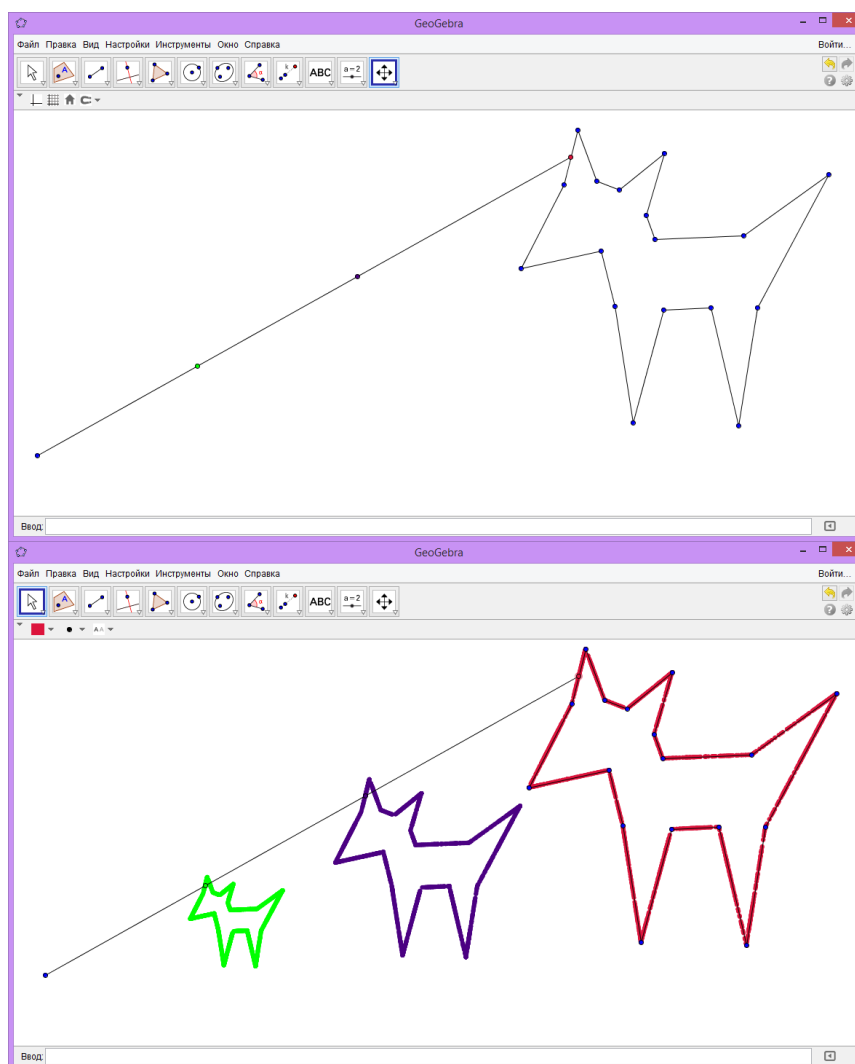





Рис. 22. Рисунок к заданию 8

**Задание 9.** С помощью преобразований симметрии постройте симметричный узор, аналогичный узорам на рис 23.

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл
2.	С помощью инструмента «Луч»  постройте произвольный луч.
3.	<p>Выберите инструмент «Поворот вокруг точки»  и щелкните по началу луча (точке А) и по самому лучу.</p> <p>Укажите угол поворота <math>30^\circ</math>.</p> <p>Выполните эти же действия с появившимся лучом. Таким же образом постройте еще 9 лучей. В итоге на полотне должно быть 12 лучей, таких, что углы между соседними лучами - <math>30^\circ</math>.</p>

4.	Добавьте на полотно точку (точка G) и поверните ее на $30^\circ$ вокруг точки А, используя «Поворот вокруг точки»  . Получившуюся точку (точку G') также поверните на $30^\circ$ вокруг точки А. Таким же образом постройте еще 9 точек. В итоге на полотне должно быть 12 лучей и 12 точек (G,G',G'',G''',H,H',H'',H''',I,I',I'',I''') вне лучей как на рис. 24.
5.	Сделайте все лучи и точки на них невидимыми. На полотне должны быть видимыми только точки G,G',G'',G''',H,H',H'',H''',I,I',I'',I''' (рис. 25)
6.	Щелкните по точке G правой кнопкой мыши – «Свойства». На вкладке «Основные» укажите «Оставлять след». На вкладке «Дополнительно» в поле «Красный» укажите $x(G)$ , «Зеленый» - $y(G)$ , «Синий» - $x(G)+y(G)$ (рис. 26).
7.	Выполните действия пункта 6 для точек G',G'',G''',H,H',H'',H''',I,I',I'',I'''.
6.	Переместите точку С по полотну для получения узора.

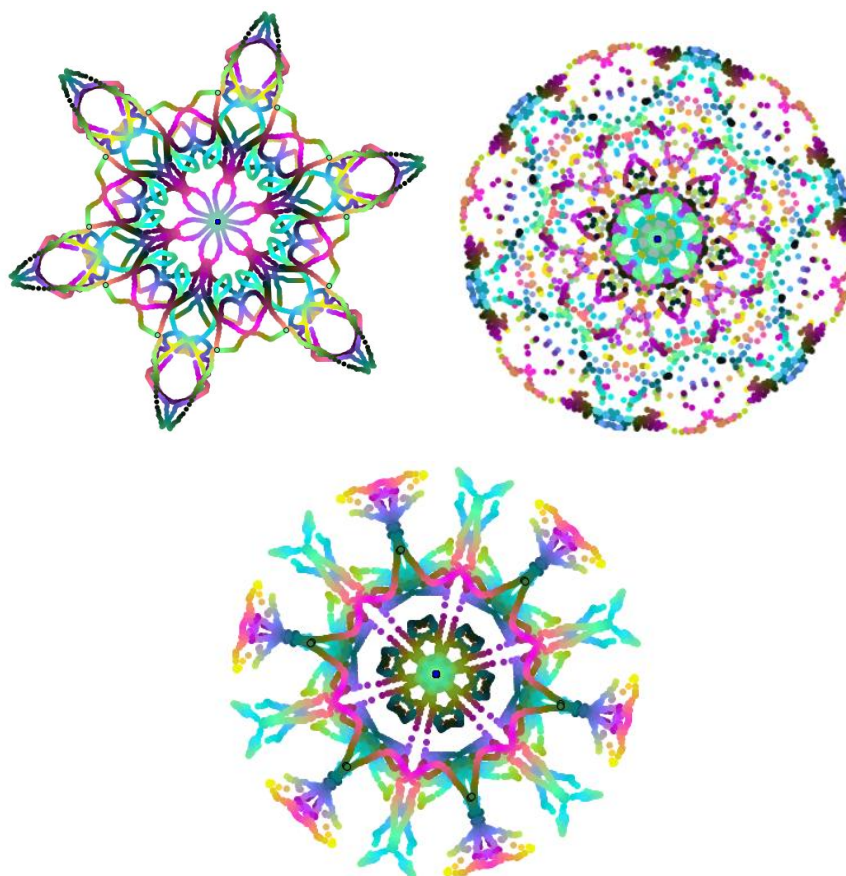


Рис. 23

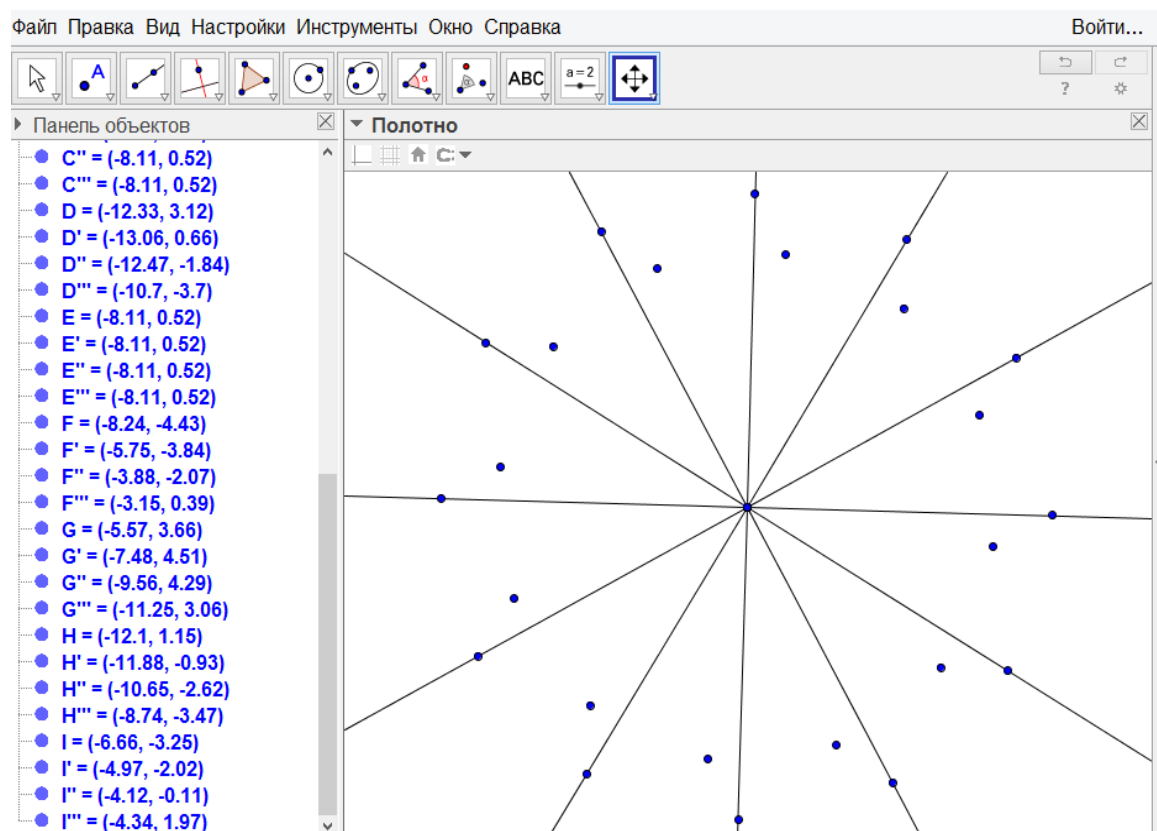


Рис. 24

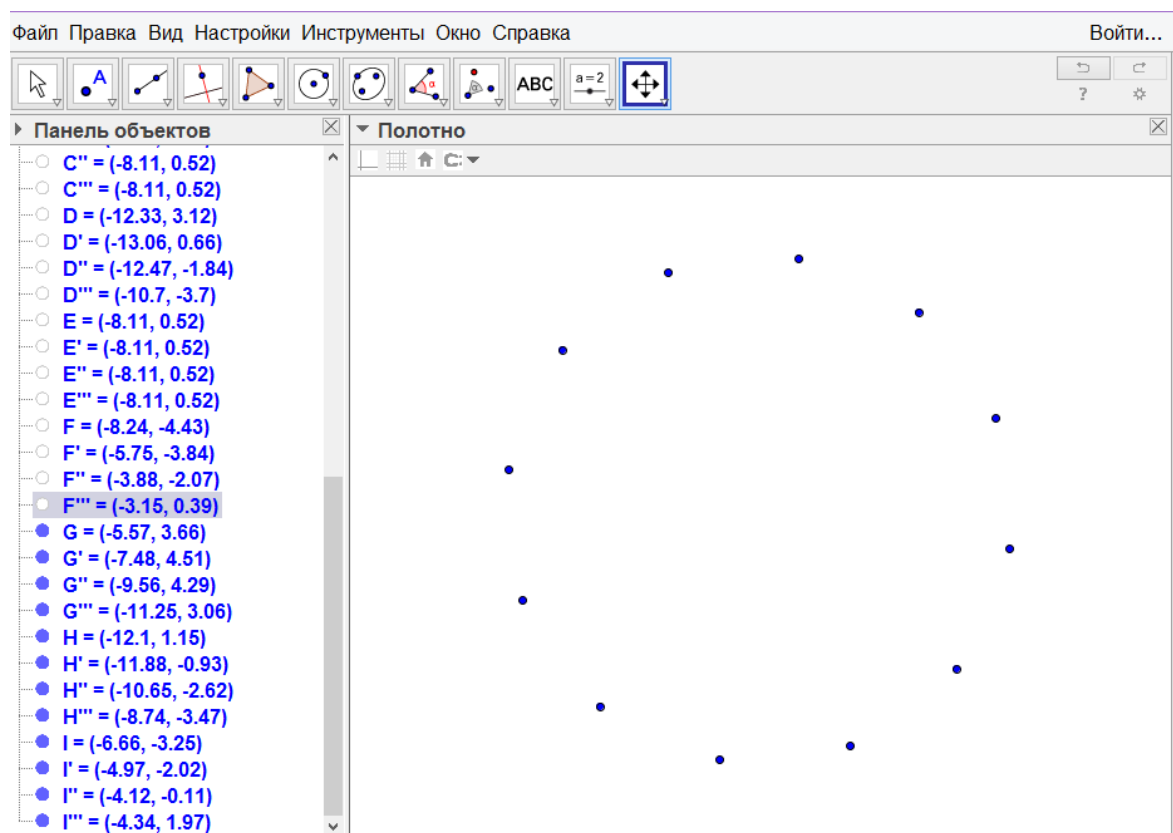


Рис. 25

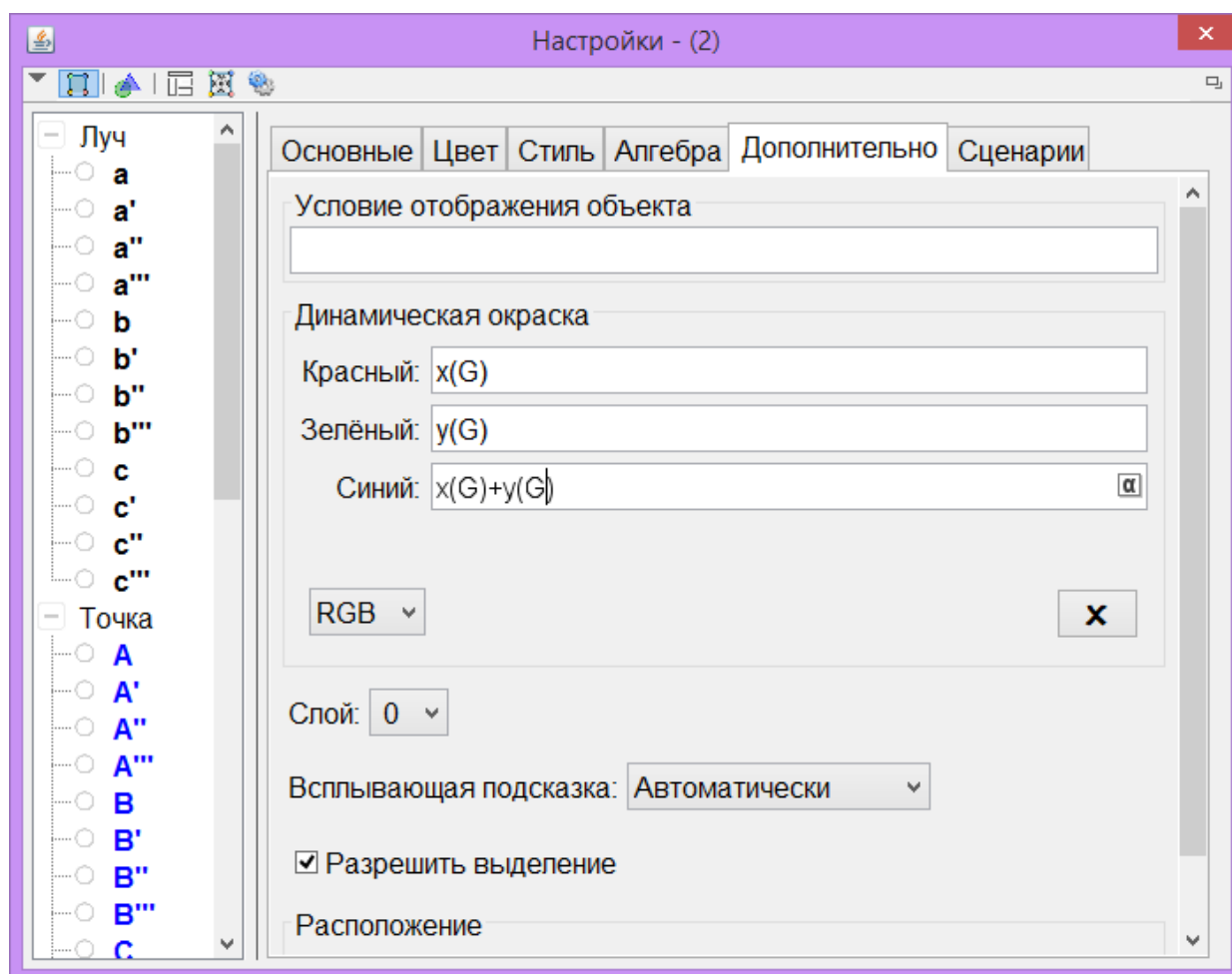


Рис. 26

### Задания для самостоятельной работы

1. Создайте наглядное пособие, демонстрирующее коллинеарные, сонаправленные, протовиположно направленные и равные векторы.
2. Создайте наглядное пособие, демонстрирующее правило многоугольника сложения векторов.
3. Создайте иллюстрацию к решению задачи. Турист прошел 20 км на восток из города А в город В, а потом 30 км на восток в город С. Выбрав подходящий масштаб, начертите векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{BC}$ . Равны ли векторы  $\vec{AB} + \vec{BC}$  и  $\vec{AC}$ ?
4. Создайте иллюстрацию к решению задачи с помощью векторов. Парашютист спускался на землю со скоростью 3 м/с. Порывом ветра его начинает относить в сторону со скоростью  $3\sqrt{3}$  м/с. Под каким углом к вертикали спускается парашютист?

5. Создайте иллюстрацию к решению задачи с помощью векторов. Самолет пролетел 200 км на юго-запад, а затем 300 км на запад. На каком расстоянии он оказался от начальной точки?

6. Создайте иллюстрацию к решению задачи с помощью векторов. С одного берега реки на другой поплыл человек, выдерживая направление прямо на противоположный берег. Известны скорость пловца, скорость течения реки и ширина реки. Как узнать, на сколько его отнесет течением от первоначально намеченной точки, когда он окажется на том берегу? Как узнать, какое расстояние он проплыл?

7. Создайте иллюстрацию к решению задачи с помощью векторов. На берегах одной реки напротив друг друга стоят две деревни. Из первую во вторую отправился катер. Известны скорость катера в стоячей воде, скорость течения реки и ширина реки. Требуется узнать под каким углом должна быть направлена скорость катера относительно берега, какова скорость катера в этой реке, какой путь пройдет этот катер. Как это сделать?

8. Создайте иллюстрацию к решению задачи с помощью векторов. Корабль держит курс по компасу на восток со скоростью  $v_1$ . Дует северный ветер со скоростью  $v_2$ , а течение сносит корабль на юго-запад со скоростью  $v_3$ , причем  $v_1 = v_2 = 10v_3$ . Каков истинный курс корабля?

9. Создайте иллюстрацию к решению задачи. Равносторонний треугольник отразили относительно его средней линии. Вычислить периметр и площадь объединения полученного и исходного треугольников, если сторона треугольника равна 2.

10. Создайте иллюстрацию к решению задачи. Даны две пересекающиеся прямые и точка  $O$ , не лежащая ни на одной из них. Используя центральную симметрию относительно точки  $O$ , постройте прямую, проходящую через точку  $O$ , так, чтобы отрезок этой прямой, отсекаемый данными прямыми, делился точкой  $O$  пополам.

11. Создайте иллюстрацию к решению задачи. Даны острый угол  $ABC$  и точка  $D$  внутри его. Используя осевую симметрию, найдите на сторонах данно-

го угла такие точки E и F, чтобы треугольник DEF имел наименьший периметр.

12.Создайте иллюстрацию к решению задачи. Две деревни находятся по одну сторону от прямого шоссе  $a$ . В какой точке C на шоссе  $a$  надо устроить остановку автобуса, чтобы сумма расстояний  $AC+CB$  была кратчайшей.

13.Создайте динамический чертеж, с помощью которого можно определить под каким углом нужно ударить бильярдный шар, чтобы он попал в лузу в углу бильярдного стола,.

14.Создайте иллюстрацию к решению задачи. Два зеркала образуют угол. Из точки внутри его надо направить луч так, чтобы, отразившись от двух сторон угла, он вернулся в ту же точку. Как это сделать?


15.Создайте иллюстрацию к решению задачи. Некий бильярдный стол имеет острый угол BAC. Шар, ударившись о его борт AB, а потом отразившись от него и от борта AC, покатился в некотором направлении. Какой угол он будет составлять с первоначальным направлением движения шара до того, как он ударился о борт AB?



#### 4. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

*Задание 1.* Найдите все решения уравнения  $x^2 - 4 = |x - 2|$ .

##### **Ход выполнения**

1.	Запустите GeoGebra. Выберите вид «Алгебра и графики».
2.	В строке ввода введите « $f(x)=x^2-4$ » и нажмите «Enter».
3.	В строке ввода введите « $g(x)= x-2 $ » (либо « $g(x)=abs(x-2)$ ») и нажмите «Enter»
4.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте точки пересечения графиков $f(x)$ и $g(x)$ . Абсциссы точек пересечения являются корнями уравнения.

*Задание 2.* Графически решите систему уравнений


$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$$

*Задание 3.* Изобразите множество решений системы

$$\begin{cases} y > x^2, \\ y \leq -2x. \end{cases}$$

##### **Ход выполнения**


*1 Способ.* Введите в строку ввода « $y > x^2$ » и нажмите «Enter». Затем введите в строку ввода « $y \leq -2x$ » и нажмите «Enter».

*2 Способ.* Введите в строку ввода « $(y > x^2) \wedge (y \leq -2x)$ » и нажмите «Enter». Символ « $\wedge$ » вводится с помощью кнопки .

*Задание 4.* Изобразите множество решений системы

$$\begin{cases} 5x - 7y > -11, \\ 2x + 3y \leq 10. \end{cases}$$

##### **Ход выполнения**

Введите в строку ввода « $(5x-7y > -11) \wedge (2x+3y \leq 10)$ » и нажмите «Enter». Символ « $\wedge$ » вводится с помощью кнопки .

*Задание 5.* Постройте чертеж, представленный на рис. 27.

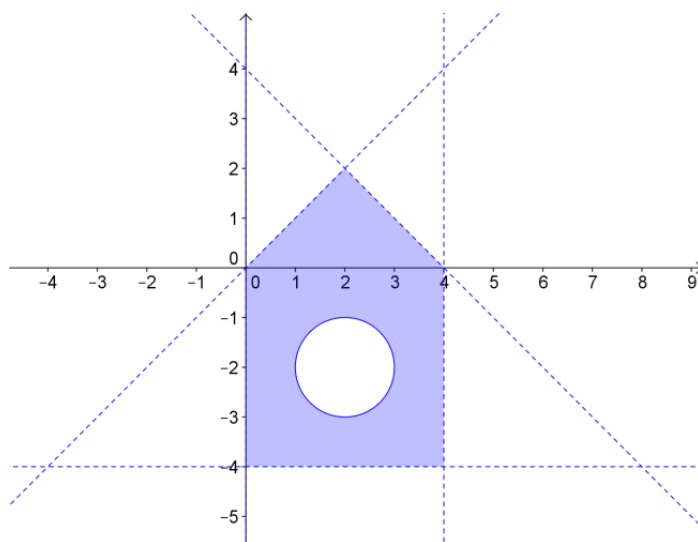


Рис. 27

**Задание 7.** Создайте иллюстрацию к решению следующей задачи «Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 1$$

имеет три корня».

### Задания для самостоятельной работы

1. Сколько корней имеет уравнение  $\left| |x^2 - 4| - x \right| = |x|$ ?
2. Изобразите на плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 4, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

3. Изобразите на плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 4, \\ x^2 + y^2 \leq 9, \\ y > 1. \end{cases}$$

4. С помощью GeoGebra найдите все значения параметра  $a$ , при котором уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{2}x - a} = a - x$$

имеет один корень.

5. С помощью GeoGebra найдите все значения параметра  $a$ , при котором уравнение  $x^2 - |x| = a$  имеет 3 корня.

6. С помощью GeoGebra определите, при каком значении  $a$  уравнения  $x^2 + x + a = 0$  и  $x^2 + ax + 8 = 0$  имеют один общий корень.

7. С помощью GeoGebra найдите все положительные значения  $a$ , при котором система имеет 3 решения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = x^2 - a^2. \end{cases}$$

8. С помощью GeoGebra найдите все положительные значения  $a$ , при котором система имеет 3 решения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y^2 = x + a^2. \end{cases}$$

9. С помощью GeoGebra найдите все положительные значения  $a$ , при котором система имеет 3 решения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = |x - 2|. \end{cases}$$

10. С помощью GeoGebra найдите все положительные значения  $a$ , при котором система имеет 2 решения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ x^2 - y^2 = 9. \end{cases}$$

11. С помощью GeoGebra найдите все положительные значения  $a$ , при котором система имеет только одно решение.

$$\begin{cases} (x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

12. Найдите наибольшее значение  $a$ , при котором прямая  $x + 3y = a$  имеет с областью

$$\begin{cases} -2x + y \leq 2, \\ -x + 2y \leq 7, \\ x + 3y \leq 18, \\ 4x - 3y \leq 12 \end{cases}$$

хотя бы одну общую точку.

13. Найдите наибольшее положительное значение  $a$ , при котором прямая  $4y - x = a$  имеет с областью

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 24, \\ -8x + 3y \leq 24, \\ 2x - 3y \leq 12, \\ 4x + 3y \geq 12 \end{cases}$$

хотя бы одну общую точку.

14. Найдите наименьшее положительное значение  $a$ , при котором окружность  $x^2 + (y - 2)^2 = a^2$ , имеет с областью

$$\begin{cases} 2x + y \geq 7, \\ x + 2y \geq 5, \\ x \geq 1, \\ y \geq 0 \end{cases}$$

хотя бы одну общую точку.

15. Найдите наименьшее положительное значение  $a$ , при котором окружность  $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = a^2$ , имеет с областью

$$\begin{cases} 2x - y \geq -4, \\ 2x - 3y \leq 6, \\ x + y \leq 11, \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

хотя бы одну общую точку.

## 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ. ИНТЕГРАЛ

Задание 1. Постройте график функции





$$y(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4, \\ 6 - x, & x \geq 4. \end{cases}$$

### Ход выполнения

- 1) Введите в строку ввода «Если[ $x \leq 0$ ,  $x^2$ ]».
- 2) Введите в строку ввода «Если[ $0 < x < 4$ ,  $\sqrt{x}$ ]».
- 3) Введите в строку ввода «Если[ $x \geq 4$ ,  $6 - x$ ]».

Задание 2. Создайте интерактивный чертеж, отображающий область определения и область значения функции  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ , заданной на интервале  $[-3, 1]$  (рис. 28).

### Ход выполнения

1.	Запустите GeoGebra. Выберите вид «Алгебра и графики».
2.	В строке ввода введите «Функция[ $x^3 + 3x^2 - 3$ , $-3$ , $1$ ]» и нажмите «Enter».
3.	С помощью инструмента «Точка на объекте»  отметьте на графике функции точку.
4.	Выберите инструмент «Перпендикулярная прямая»  и щелкните по точке A, а затем по оси абсцисс. Далее щелкните по точке A, а затем по оси ординат.
5.	С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте точки пересечения полученных прямых с осями координат.
6.	Сделайте прямые невидимыми.
7.	Соедините с помощью инструмента «Отрезок»  точки A и B, точки A и C.
8.	В свойствах точек B и C укажите «Оставлять след». Теперь передвигая точку A на осях абсцисс и ординат будут отображаться область определения и область значений.

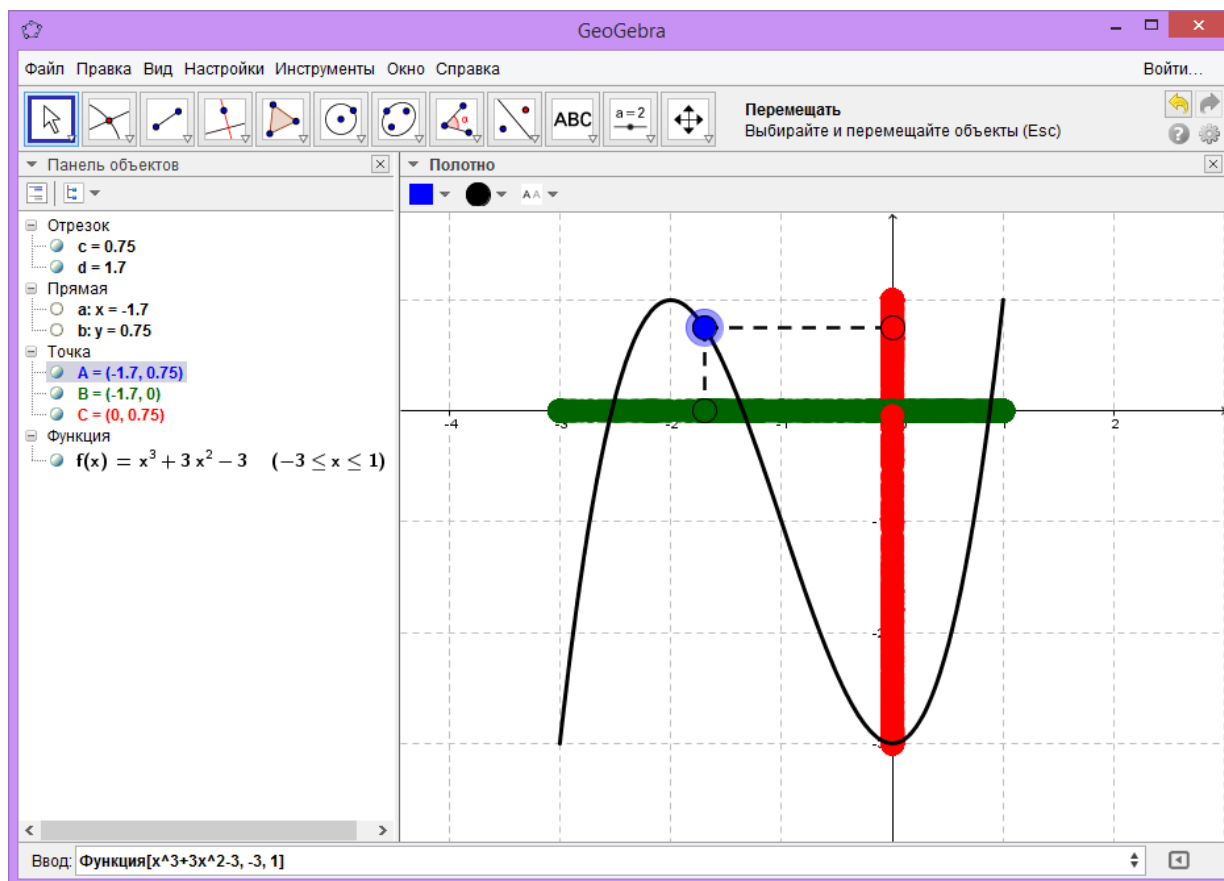



Рис. 28

Задание 3. С помощью GeoGebra вычислите пределы функций

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}.$$

#### Ход выполнения

- 1) Введите в строку ввода « $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 2x + 1)$ ».
- 2) Введите в строку ввода «Предел $[f(x), -1]$ ».
- 3) Введите в строку ввода «Предел $[f(x), \infty]$ ». (Символ « $\infty$ » можно добавить, используя кнопку )




Задание 4. На одном чертеже отобразите график функции  $f(x) = xe^{-x^2}$ , а также график ее производной.

#### Ход выполнения

- 1) Введите в строку ввода « $f(x) = x \cdot \exp(-x^2)$ ».
- 2) Введите в строку ввода «Производная $[f(x)]$ »

**Задание 5.** Создайте интерактивный чертеж, демонстрирующий промежутки возрастания и убывания функции  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ .

**Ход выполнения**

1.	В строке ввода введите « $f(x)=x^3+3*x^2-3$ ».
2.	В строке ввода введите «Производная[f(x)]».
3.	Сделайте график функции $g(x)$ невидимым.
4.	С помощью инструмента «Точка на объекте»  отметьте на графике функции точку.
5.	<p>Выберите инструмент «Перпендикулярная прямая»  и щелкните по точке А, а затем по оси абсцисс.</p> <p>С помощью инструмента «Пересечение»  отметьте точки пересечения полученной прямой с осью абсцисс. Сделайте прямую невидимой.</p>
6.	<p>Щелкните правой кнопкой по точке А и выберите «Свойства».</p> <p>На вкладке «Дополнительно» в поле «Красный» укажите «Если[<math>g(A) &lt; 0, 255, 0</math>]».</p> <p>В поле «Зеленый» укажите «Если[<math>g(A) &gt; 0, 255, 0</math>]».</p> <p>В поле «Синий» укажите «Если[<math>g(A) = 0, 255, 0</math>]».</p> <p>Аналогичные действия выполните для точки В.</p>
7.	<p>В свойствах точки В укажите «Оставлять след».</p> <p>Теперь при перемещении точки А по графику функции промежутки возрастания будут отображаться зеленым цветом, а промежутки убывания красным.</p>

**Задание 6.** Создайте интерактивный чертеж, демонстрирующий промежутки выпуклости и вогнутости функции  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 3$ .

**Задание 7.** Найдите асимптоты графика функции  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ .

**Ход выполнения**

- 1) Введите в строку ввода « $f(x)=(x^2-4)/(x-1)$ ».
- 2) Введите в строку ввода «Асимптота[f(x)]».

**Задание 8.** Найдите нули функции  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$  на интервале  $[-10, 10]$ .

### ***Ход выполнения***

- 1) Введите в строку ввода « $f(x)=(x^2-4)/(x-1)$ ».
- 2) Введите в строку ввода «НулиФункции[f(x),-10,10]».

**Задание 9.** Найдите уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 1$  в точке  $x_0 = 1$ .

### ***Ход выполнения***

- 1) Введите в строку ввода « $f(x)=x^4-3x^3+x-1$ ».
- 2) Введите в строку ввода «Касательная[1, f(x)]».

**Задание 10.** Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ .

### ***Ход выполнения***

- 1) Введите в строку ввода « $f(x)=x^2+2$ ».
- 2) Введите в строку ввода «Интеграл[f(x),-1,2]».

**Задание 10.** Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt{x}$ .

### ***Ход выполнения***

- 1) Введите в строку ввода « $f(x)=x^2$ ».
- 2) Введите в строку ввода « $g(x)=\text{sqrt}(x)$ ».
- 3) Введите в строку ввода «ИнтегралМежду[f(x),g(x),0,1]».

### **Задание для самостоятельной работы**

Создайте интерактивный чертеж, с помощью которого можно исследовать произвольную функцию на промежутке  $[a,b]$  по следующей схеме.

- 1) Нули функции
- 2) Промежутки знакопостоянства
- 3) Асимптоты графика функции
- 4) Производная функции
- 5) Промежутки возрастания и убывания, точки максимума



## 6. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

*Задание 1.* Постройте траекторию, по которой движется окружность радиуса  $r=2$ , катящаяся по прямой  $y=0$  без скольжения от точки  $x=0$  до точки  $x=24$ .

*Примечание.* Искомая кривая называется циклоидой (рис.29). Параметрически циклоида задается как

$$\begin{cases} x = rt - r \sin t, \\ y = r - r \cos t. \end{cases}$$

### *Ход выполнения*

- 1) Введите в строку ввода « $r=2$ ».
- 2) Введите в строку ввода « $f(t)=r*t-r*\sin(t)$ ».
- 3) Введите в строку ввода « $g(t)=r-r*\cos(t)$ ».
- 4) Скройте графики функция  $f(x)$  и  $g(x)$ .
- 5) Добавьте на полотно ползунок  $a$  с интервалом от 0 до 24.
- 6) Введите в строку ввода « $y=0$ ».
- 7) Введите в строку ввода «Кривая[ $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $t$ , 0,  $a$ ]».
- 8) Введите в строку ввода « $A=(a*r,r)$ ».
- 9) Введите в строку ввода « $B=(f(a),g(a))$ ».
- 10) Введите в строку ввода «Окружность[ $A$ ,  $B$ ]».
- 11) Введите в строку ввода «Отрезок[ $A$ ,  $B$ ]».
- 12) Измените цвет кривой на красный, а цвет окружности на синий.

Скройте координатные оси.

- 13) Анимируйте ползунок  $a$ .

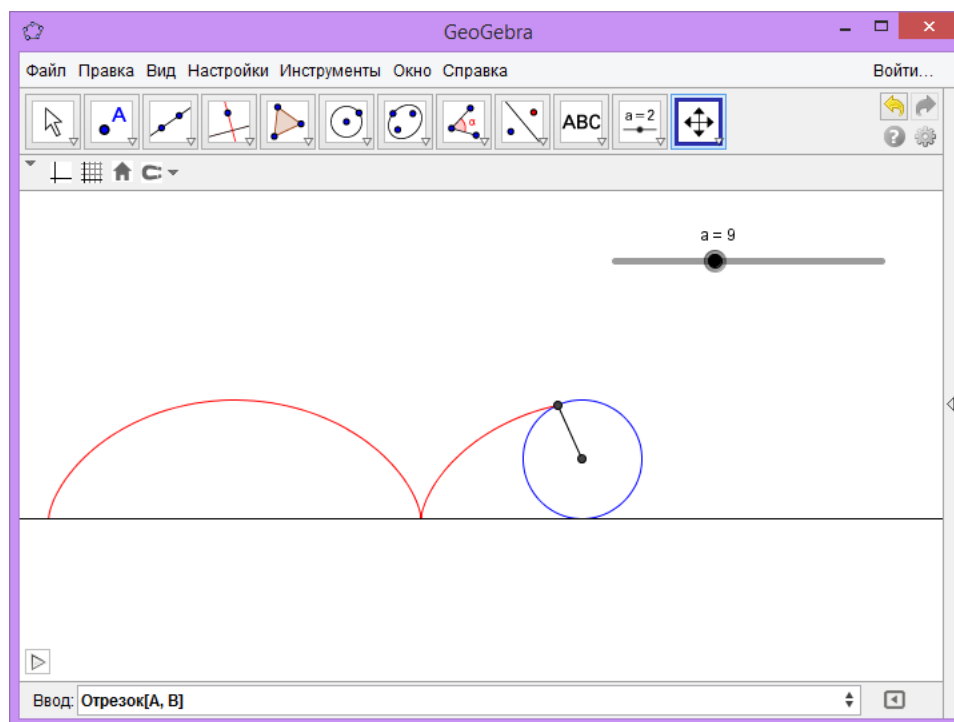
*Задание 2.* Постройте дельтоиду - кривую, образуемую точкой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности, радиус которой втрое больше радиуса первой (рис. 30).

Параметрические уравнения дельтоиды

$$\begin{cases} x = r \cos t + r \cos(2t), \\ y = 2r \sin t - r \sin(2t). \end{cases}$$

### *Ход выполнения*

- 1) Введите в строку ввода « $r=4$ » (радиус внешней окружности может быть любым).
- 2) Введите в строку ввода « $f(t)=2*r*\cos(t)+r*\cos(2*t)$ ».
- 3) Введите в строку ввода « $g(t)=2*r*\sin(t)-r*\sin(2*t)$ ».
- 4) Скройте графики функция  $f(x)$  и  $g(x)$ .
- 5) Добавьте на полотно ползунок  $a$  с интервалом от 0 до 20.
- 6) Введите в строку ввода «Кривая[ $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $t$ , 0,  $a$ ]».
- 7) Введите в строку ввода « $A=(0,0)$ ».
- 8) Введите в строку ввода « $B=(f(a),g(a))$ ».
- 9) Введите в строку ввода « $C=(2*r*\cos(a), 2*r*\sin(a))$ ».
- 10) Введите в строку ввода «Окружность[ $A$ ,  $3*r$ ]».
- 11) Введите в строку ввода «Окружность[ $C$ ,  $r$ ]».
- 12) Введите в строку ввода «Отрезок[ $C$ ,  $B$ ]».
- 13) Измените цвет кривой на красный, а цвет окружностей на синий и зеленый. Скройте координатные оси.
- 14) Анимлируйте ползунок  $a$ .



*Рис. 29. Циклоида*

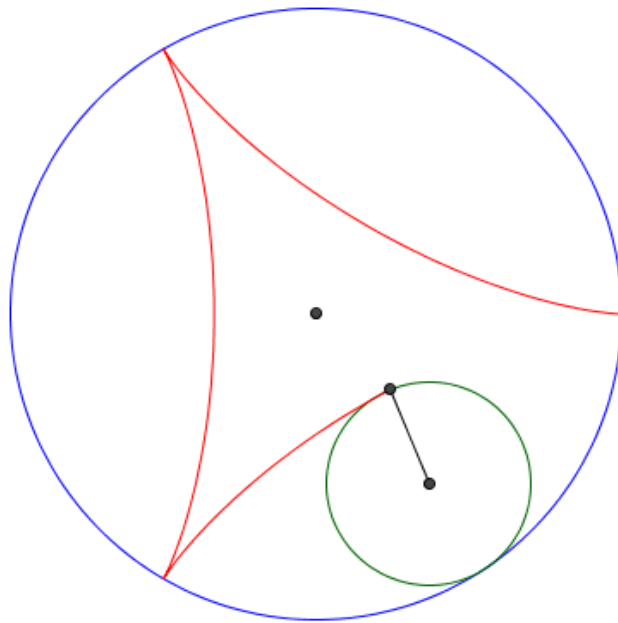


Рис. 30. Дельтоида

Задание 3. Постройте график функции

$$\begin{cases} x = 3 \sin(at) \cos t, \\ y = 3 \sin(at) \sin t. \end{cases}$$

Значение параметра  $a$  изменяется с помощью ползунка от 0 до 15.

### Задания для самостоятельной работы

Гипоциклоида - кривая, образуемая точкой окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности. Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = r(k-1) \left( \cos t + \frac{\cos((k-1)t)}{k-1} \right), \\ y = r(k-1) \left( \sin t - \frac{\sin((k-1)t)}{k-1} \right), \end{cases}$$

где  $k = \frac{R}{r}$ , где  $R$  - радиус неподвижной окружности,  $r$  - радиус катящейся окружности.

Эпициклоида - кривая, образуемая точкой окружности, катящейся по внешней стороне другой окружности. Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = r(k+1) \left( \cos t - \frac{\cos((k+1)t)}{k+1} \right), \\ y = r(k+1) \left( \sin t - \frac{\sin((k+1)t)}{k+1} \right), \end{cases}$$

где  $k = \frac{R}{r}$ , где  $R$  - радиус неподвижной окружности,  $r$  - радиус катящейся окружности.

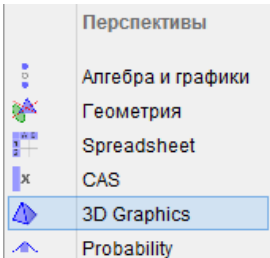

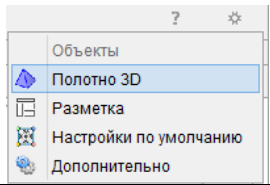



Создайте динамический чертеж, иллюстрирующий построение следующих кривых.

1. Гипоциклоиды при  $k=0.8$ .
2. Гипоциклоиды при  $k=4$ .
3. Гипоциклоиды при  $k=5$ .
4. Гипоциклоиды при  $k=4$ .
5. Гипоциклоиды при  $k=6$ .
6. Гипоциклоиды при  $k=4,5$ .
7. Гипоциклоиды при  $k=5,5$ .
8. Гипоциклоиды при  $k=0,3$ .
9. Эпициклоиды при  $k=2,5$ .
10. Эпициклоиды при  $k=3$ .
11. Эпициклоиды при  $k=2,5$ .
12. Эпициклоиды при  $k=5$ .
13. Эпициклоиды при  $k=5,5$ .
14. Эпициклоиды при  $k=2,8$ .
15. Эпициклоиды при  $k=7$ .

## 7. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Задание 1. Постройте куб как на рис. 31.

### Ход выполнения

1.	<p>Запустите GeoGebra. В меню «Перспективы» в правой части полотна справа выберите вид «3D Graphics»</p> 
2.	<p>Нажмите на кнопку  в верхнем правом углу главного окна и выберите «Полотно 3D»</p> 
3.	<p>На вкладке «Основные» уберите галочки рядом с «Показывать оси», «Use clipping», «Show clipping».</p>
4.	<p>Щелкните по «Полотно 3D» вверху полотна и нажмите на кнопку «Показать или спрятать плоскость» на панели</p> 
5.	<p>Выполните «Настройки-Обозначения-Только для точек», затем «Настройки-Сохранить настройки».</p>
6.	<p>Выберите инструмент «Куб»  и отметьте мышью на полотне две точки. С помощью инструмента  изображение можно повернуть в пространстве.</p>
7.	<p>На панели объектов в разделе «Cube» выберите куб а и щелкните по нему правой кнопкой мыши. Выберите «Свойства» и измените заливку, цвет и толщину линий.</p>

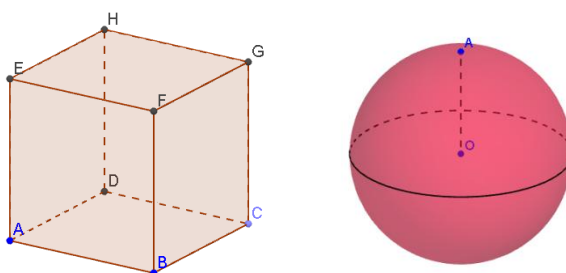




Рис. 31



**Задание 2.** Постройте сферу как на рис. 31.

**Ход выполнения**

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите « $O=(0,0,0)$ » и нажмите «Enter»
3.	В строке ввода наберите « $(0,0,3)$ » и нажмите «Enter»
4.	Выберите инструмент «Сфера по центру и точке»  и щелкните по точкам O и A.
5.	Выберите инструмент «Отрезок»  и щелкните по точкам O и A.
6.	Выберите инструмент «Окружность с центром, радиусом и направлением» и щелкните по точке O, затем отрезку OA, укажите радиус 3.


**Задание 3.** Постройте пирамиду с вершинами в точках  $A(4,1,0), B(-1,-3,1), C(-2,5,-1), D(0,0,4)$ .

**Ход выполнения**

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите « $A=(4,1,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $B=(-1,-3,1)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $C=(-2,5,-1)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $D=(0,0,4)$ » и нажмите «Enter».
4.	Выберите инструмент «Многоугольник»  и щелкните по точкам A, B, C, A.
3.	Выберите инструмент «Пирамида»  и щелкните по многоугольнику и точке D.


**Задание 4.** Постройте призму, нижней гранью которой является прямоугольник с вершинами  $(3,0,0), (0,2,0), (5,2,0)$ , а одна из точек верхней грани имеет координаты  $(1,1,5)$ .

**Ход выполнения**

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите « $(3,0,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $(0,2,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $(5,2,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $(1,1,5)$ » и нажмите «Enter».
3.	Выберите инструмент «Призма»  и щелкните по точкам A, B, C, A, D.

**Задание 5.** Постройте конус, высота которого равна 3, а радиус основания равен 2.

***Ход выполнения***

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите «(0,0,0)» и нажмите «Enter». В строке ввода наберите «(0,0,3)» и нажмите «Enter».
3.	Выберите инструмент «Конус»  и щелкните по точкам А, В, укажите радиус 2.

**Задание 6.** Постройте цилиндр, высота которого равна 5, а радиус основания равен 3,5. Определите объем цилиндра с помощью GeoGebra

***Ход выполнения***

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите «(0,0,0)» и нажмите «Enter». В строке ввода наберите «(0,0,5)» и нажмите «Enter».
3.	Выберите инструмент «Цилиндр»  и щелкните по точкам А, В, укажите радиус 3.5.
4.	Выберите инструмент «Объем»  и щелкните по цилиндру.

**Задание 7.** Постройте правильный октаэдр.

***Ход выполнения***


1.	Создайте новый файл.
2.	Выберите инструмент «Точка» и отметьте на полотне две точки.
3.	В строке ввода наберите «Октаэдр[А, В]» и нажмите «Enter».
4.	Выберите инструмент «Точка» и отметьте на полотне еще две точки.
5.	В строке ввода наберите «Октаэдр[А, В]» и нажмите «Enter».

**Задание 8.** Постройте правильные тетраэдр, додекаэдр и икосаэдр с помощью одноименных команд.

**Задание 9.** Постройте развертки правильных додекаэдра, куба, октаэдра, икосаэдра, тетраэдра.

***Ход выполнения***

1.	Создайте новый файл.
2.	Выберите инструмент «Точка» и отметьте на полотне две точки.

3.	В строке ввода наберите «Додекаэдр[А, В]» и нажмите «Enter».
4.	Выберите инструмент «Развертка»  и щелкните по додекаэдру.
5.	Выполните «Вид-Полотно». Вы увидите развертку додекаэдра на плоскости. При перемещении ползунка $b$ развертка складывается в додекаэдр.
6.	Аналогичным образом постройте развертки остальных фигур.

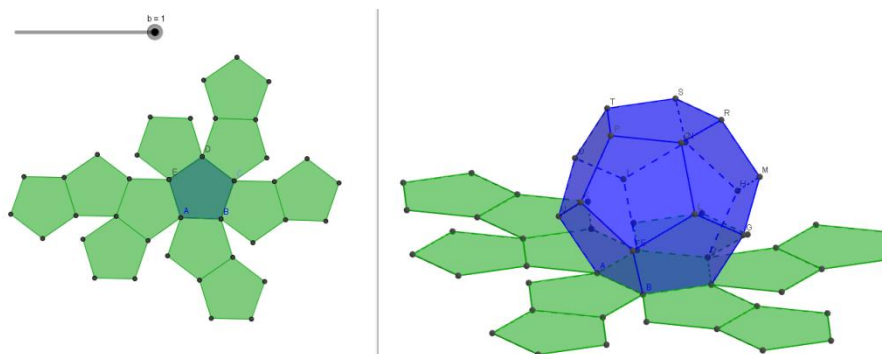









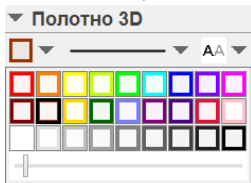

Рис. 32 – Развертка многогранника

**Задание 10.** Постройте сечение куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  плоскостью, проходящей через точки  $M, N, K$ , если  $M$  лежит на ребре  $BC$ ,  $N$  лежит на ребре  $DD_1$ , точка  $K$  лежит на ребре  $A_1 B_1$ .

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл.
2.	Выберите инструмент «Куб»  и отметьте мышью на полотне две точки.
3.	Переименуйте точку $E$ в точку $A_1$ . Для этого щелкните по точке $E$ правой кнопкой и выберите «Переименовать». В появившемся окне измените « $E$ » на « $A_1$ ». Аналогичным образом переименуйте точки $F, G, H$ в точки $B_1, C_1, D_1$ соответственно.
3.	В строке ввода наберите « $M=\text{Точка}[\text{ребро}BC]$ » и нажмите «Enter».
4.	Выберите инструмент  и поместите точку $M$ внутри ребра $BC$ .
5.	В строке ввода наберите « $N=\text{Точка}[\text{ребро}DH]$ » и нажмите «Enter».
6.	Выберите инструмент  и поместите точку $N$ внутри ребра $DD_1$ .
7.	В строке ввода наберите « $K=\text{Точка}[\text{ребро}EF]$ » и нажмите «Enter».
8.	Выберите инструмент  и поместите точку $K$ внутри ребра $A_1 B_1$ .



9.	Выберите инструмент «Плоскость через 3 точки»  щелкните по точкам М,N,K.
10.	В строке ввода наберите «ПересечьКонтуры[b, a]» и нажмите «Enter». (а – это куб, b – плоскость, убедитесь в этом, посмотрев на панель объектов).
11.	Скройте плоскость b, для этого укажите с помощью инструмента  на плоскость, щелкните правой кнопкой мыши и сделайте неактивным поле «Показывать объект».
12.	<p>С помощью инструмента  выберите на панели объектов куб а. (Если панель объектов не отображается, то выполните «Вид-Панель объектов»)</p> <p>Щелкните по заголовку «Полотно 3D» в верхнем левом углу полотна так, чтобы появилась панель управления цветом.</p>  <p>Сделайте куб почти прозрачным.</p>
13.	С помощью инструмента  выберите на панели объектов многоугольник1. Измените цвет многоугольника.

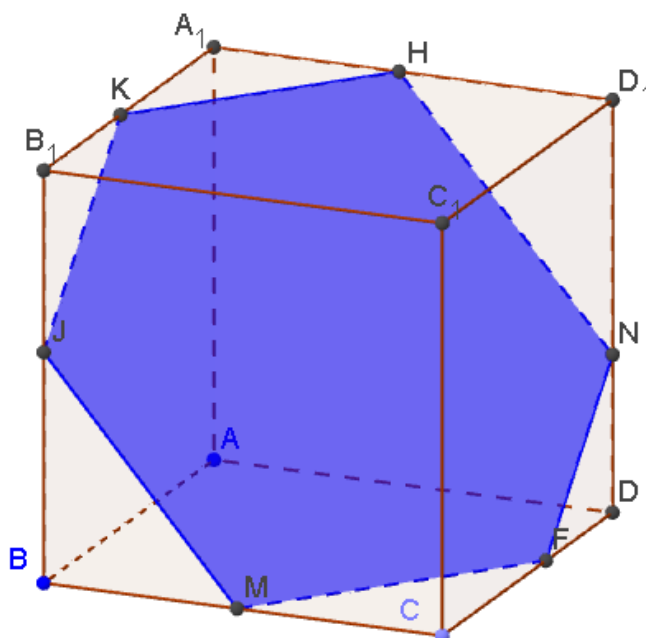




Рис. 33. Результат выполнения задания 10




**Задание 11.** Постройте плоскость, проходящую через точки  $A(2,-5,0)$ ,  $B(1,3,0)$ ,  $C(-5,2,0)$ , а также параллельную ей плоскость, проходящую через точку  $D(0,0,4)$ .

**Ход выполнения**

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите « $(2,-5,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $(1,3,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $(-5,2,0)$ » и нажмите «Enter».
3.	Выберите инструмент «Плоскость через три точки»  и щелкните по точкам A, B, C.
4.	В строке ввода наберите « $(0,0,4)$ » и нажмите «Enter».
5.	Выберите инструмент «Параллельная плоскость»  и щелкните по точке D.




**Задание 12.** Постройте плоскость, проходящую через точки  $A(-3,1,0)$ ,  $B(2,1,0)$ ,  $C(0,-6,-1)$ , а также перпендикулярную ей плоскость, проходящую через точку  $D(-5,-5,4)$  перпендикулярно прямой AC.

**Ход выполнения**

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите « $(-3,1,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $(2,1,0)$ » и нажмите «Enter». В строке ввода наберите « $(0,-6,-1)$ » и нажмите «Enter».
3.	Выберите инструмент «Плоскость через три точки»  и щелкните по точкам A, B, C.
4.	В строке ввода наберите « $(-5,-5,4)$ » и нажмите «Enter».
5.	Выберите инструмент «Прямая»  и щелкните по точкам A и B.
6.	Выберите инструмент «Перпендикулярная плоскость»  и щелкните по точке D и прямой AC.

**Задание 13.** Постройте плоскость, проходящую через точки  $A(-2,1,0)$ ,  $B(2,1,0)$ ,  $C(0,-3,0)$ , а также перпендикулярную ей прямую, проходящую через точку  $D(1,0,5)$ .

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл.
2.	В строке ввода наберите «(-2,1,0)» и нажмите «Enter». В строке ввода наберите «(2,1,0)» и нажмите «Enter». В строке ввода наберите «(0,-3,0)» и нажмите «Enter».
3.	Выберите инструмент «Плоскость через три точки»  и щелкните по точкам А, В, С.
4.	В строке ввода наберите «(1,0,5)» и нажмите «Enter».
5.	Выберите инструмент «Перпендикулярная прямая»  и щелкните по точке D и плоскости ABC.
6.	Выберите инструмент «Пересечение»  и щелкните по прямой и плоскости.

*Задание 14.* Постройте график функции  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

### Ход выполнения

1.	Создайте новый файл.
2.	Щелкните правой кнопкой мыши по полотну и выберите «Оси».
3.	В строке ввода наберите « $x^2+y^2$ » и нажмите «Enter».

*Задание 15.* Постройте интерактивный чертеж, с помощью которого можно убедиться, что объем конуса равен трети произведения площади основания на высоту конуса.

*Задание 16.* Постройте график функции  $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

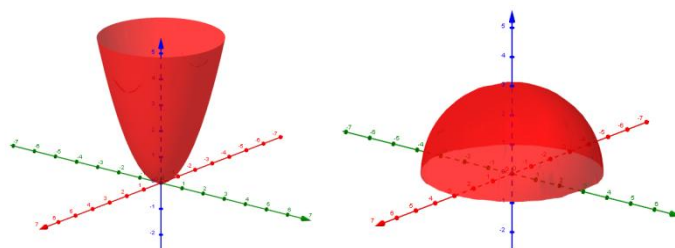


Рис. 34. Графики к заданиям 15 и 16

### Задания для самостоятельной работы

1. Постройте сферу, вписанную в цилиндр высотой 2 и радиусом основания 1.

2. Постройте куб, вписанный в сферу.
3. Постройте сферу, вписанную в куб.
4. Постройте сферу, вписанную в конус.
5. Постройте сечение куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$ , плоскостью, проходящей через точки  $B_1$ ,  $C_1$  и середину ребра  $CD$ .
6. Постройте сечение куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$ , плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $C$  и точку  $O$  – точку пересечения диагоналей куба.
7. Постройте сечение пирамиды  $ABCD$ , плоскостью, проходящей через точку  $M$  – середину ребра  $BD$ , через точку  $N$  – середину ребра  $DC$  и через точку  $P$  – середину ребра  $AC$ .
8. Постройте сечение конуса плоскостью, к которой принадлежат точка на основании конуса, и две точки на боковой поверхности конуса.
9. Постройте сечение конуса плоскостью, параллельной основанию конуса.
10. Постройте сечение конуса плоскостью, параллельной высоте конуса.
11. Постройте параллелепипед.
12. Постройте усеченную пирамиду.
13. Постройте иллюстрацию к решению задачи. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ , в которой  $AA_1 = \sqrt{2} AB$ . Найдите угол между прямыми  $AC_1$  и  $A_1B$ .
14. Постройте иллюстрацию к решению задачи. Дан куб  $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ . Докажите, что прямая  $PM_1$ , перпендикулярна к плоскостям  $MNQ_1$  и  $QNP_1$ .
15. Постройте иллюстрацию к решению задачи. Высота конуса равна 10 см. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду основания, стягивающего дугу в  $60^\circ$ , если плоскость сечения образует с плоскостью основания конуса угол  $30^\circ$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Вернер А.Л., Рыжик В. И.*, Геометрия. 9 класс: учебник. М.: Просвещение, 2014.
2. *Атанасян Л.С., Бутузов Ф.В., Кадомцев С.Б., Кисилева Л.С., Позняк Э.Г.* Геометрия. 7-9 классы: учебник. М.: Просвещение, 2014.
3. *Атанасян Л.С., Бутузов Ф.В., Кадомцев С.Б., Кисилева Л.С., Позняк Э.Г.* Геометрия. 10-11 классы: учебник. М.: Просвещение, 2014.
4. *Колмогоров А.Н., Дудницын Ю.П., Абрамов А.М.* Алгебра и начала математического анализа: учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2014.
5. GeoGebra [Электронный ресурс] URL: <http://geogebra.org> (дата обращения: 02.02.2015).
6. GeoGebra Быстрый старт [Электронный ресурс] URL: [http://static.geogebra.org/help/geogebraquickstart\\_ru.pdf](http://static.geogebra.org/help/geogebraquickstart_ru.pdf) (дата обращения: 02.02.2015).

*Учебное издание*

**Чеботарева Эльвира Валерьевна**  
**КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ**  
**С GEOGEBRA**